Viviana Márquez
Combinatoria - Profesor Julián Abril
Tarea 2 - Febrero 12, 2018

Página 50 del libro de Chong y Meng, ejercicios 1-8.

1. Encuentre el número de formas de escoger un par $\{a, b\}$ de distintos números del conjunto $\{1, 2, \ldots, 50\}$ tal que

   a) $|a - b| = 5$
   b) $|a - b| \leq 5$

Solución:

a) Si escogemos un número x para que sea a, entonces automáticamente sabemos que $b = x - 5$. Así que podemos escoger a a del conjunto $\{1, 2, \ldots, 45\}$. Por lo tanto, el número de formas es 45.

b) Utilizando la misma lógica del problema anterior tenemos que,

$$S_i = \{a, b \in [50]; |a - b| = i\}$$

$$S_1 = \{a, b \in [50]; |a - b| = 1\}$$
$$a \in [49]$$

$$S_2 = \{a, b \in [50]; |a - b| = 2\}$$
$$a \in [48]$$

$$S_3 = \{a, b \in [50]; |a - b| = 3\}$$
$$a \in [47]$$

$$S_4 = \{a, b \in [50]; |a - b| = 4\}$$
$$a \in [46]$$

$$S_5 = \{a, b \in [50]; |a - b| = 5\}$$
$$a \in [45]$$

Como son conjuntos disyuntos, por el principio de adición tenemos que $|S| = \sum |S_i|$. Así, vemos que hay $49 + 48 + 47 + 46 + 45 = 235$ formas.

2. Hay 12 estudiantes en una fiesta. Cinco de ellos son niñas. ¿De cuántas maneras se pueden organizar estos 12 estudiantes en una fila si...?

   a) No hay restricciones
   b) Las cinco niñas deben estar juntas (formando un bloque)
   c) Dos niñas no pueden estar juntas
   d) Entre dos niños particulares A y B, no hay niños, pero exactamente tres niñas.

Solución:

a) Dado que no hay restricciones, no hay distinción de genero, sólo 12 personas. Por el principio de multiplicación se pueden organizar de 12! maneras.

b) Como las cinco niñas forman un sólo bloque, es como si tuviéramos 8 que podemos organizar de 8! maneras. Dado que las niñas pueden permutar entre sí de 5!, entonces por el principio de multiplicación bajo esta configuración podemos organizar los estudiantes de $8! \cdot 5!$ maneras.

c) Como dos niñas no pueden estar juntas, primero organizamos los niños. Los niños se pueden organizar de 7! maneras. Luego, en el siguiente diagrama vemos que una vez fijos los niños, las niñas podrían ir en cualquiera de las posiciones donde hay cuadrados.

$$\boxed{♀}\ ♂\boxed{♀}\ ♂\boxed{♀}\ ♂\boxed{♀}\ ♂\boxed{♀}\ ♂\boxed{♀}\ ♂\boxed{♀}\ ♂\boxed{♀}$$

Es decir, de 8 posibles lugares, debemos ubicar 5 niñas, es decir, $\binom{8}{5}$. Adicionalmente, las cinco niñas pueden permutar entre sí de 5! maneras. Por lo tanto, usando el principio de la multiplicación, se pueden organizar los estudiantes de $7! \cdot \binom{8}{5}5!$

d) Tenemos un bloque conformado por dos niños particulares A y B y tres niñas. Las tres niñas se pueden escoger de P_3^5 maneras y los niños pueden permutar entre sí de 2! distintas. Como no hay ninguna restricción sobre las otras siete personas y adicionalmente tenemos el bloque, estos los podemos organizar de 8! formas. Por el principio de multiplicación, entonces podemos organizar los estudiantes de $2 \cdot P_3^5 \cdot 8!$ formas. Simplificando, obtenemos $8! \cdot 5!$.

3. m niños y n niñas se van a organizar en una fila, donde $m, n \in \mathbb{N}$. Encuentre el número de formas que esto se puede hacer en cada uno de los siguientes casos:

a) No hay restricciones

b) No hay niños juntos ($m \leq n+1$)

c) Las n niñas forman un bloque

d) Un niño en particular y una niña en particular deben estar adyacentes

Solución:

a) Como no hay restricciones, contamos con $m+n$ personas que se pueden organizar de $(m+n)!$ formas distintas.

b) Como no hay niños juntos, primero organizamos las niñas, de $n!$ maneras. Entre las niñas quedan $n+1$ espacios donde podemos sentar m niños, esto es $\binom{n+1}{m}$. Además, los niños pueden permutar entre sí de m maneras. Por el principio de multiplicación, obtenemos que la respuesta es: $n! \cdot \binom{n+1}{m} \cdot m!$

c) Dado que las n niñas forman un bloque, cuentan como si fueran un objeto más, es decir, se pueden organizar la fila de $(m+1)!$ formas, pero adicionalmente las niñas pueden permutar entre sí de $n!$ maneras. Entonces, por el principio de multiplicación, obtenemos que podemos organizar a los estudiantes de $(m+1)! \cdot n!$ formas.

d) Primero organizamos todos los demás estudiantes, excluyendo los dos que están escogidos previamente. Como sobre estos no hay ninguna restricción, los podemos organizar de $(m+n-2)!$ maneras. Los otros dos estudiantes, dado que deben estar juntos, pueden ser ubicados en cualquiera de los $m+n-1$ espacios que quedan entre los otros estudiantes, esto es $\binom{m+n-1}{1}$. Adicionalmente, los dos estudiantes previamente seleccionados pueden permutar entre sí de 2! maneras. Por lo tanto, haciendo uso del principio de multiplicación, obtenemos que los estudiantes se pueden organizar de $2!\binom{m+n-1}{1}(m+n-2)!$ formas. Símplificando, obtenemos $(m+n-1)! \cdot 2$.

4. ¿Cuántas palabras de 5 letras pueden ser formadas usando $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$,

   a) si cada letra en cada palabra debe ser distinta?

   b) si, en adición, A, B, C, D, E, F puede sólo ocurrir en la primera, tercera o quinta letra, mientras que el resto como la segunda o cuarta letra?

Solución:

a) Debemos escoger 5 letras de 10 letras, donde el orden sí importa. Esto es P_5^{10}.

b) Sea $\alpha_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$ y $\alpha_2 = \{G, H, I, J\}$. La palabra la debemos formar de la siguiente manera:

$$\boxed{\alpha_1}\ \boxed{\alpha_2}\ \boxed{\alpha_1}\ \boxed{\alpha_2}\ \boxed{\alpha_1}$$

Por lo tanto, para las casillas de α_1, podemos escoger de P_3^6 maneras y para las casillas de α_2, podemos escoger de P_2^4 maneras. Por el principio de multiplicación, con estas restricciones, podemos formar $P_3^6 \cdot P_2^4$ palabras.

5. Encuentre el número de formas que se pueden organizar las 26 letras el alfabeto inglés en una fila tal que hay exactamente 5 letras entre x y y.

Solución:
Primero organicemos las letras que hay entre x y y:

$$\boxed{x}\ \underbrace{\square \cdots \square}_{5}\ \boxed{y}$$

Esas cinco letras las podemos escoger de P_5^{24} maneras, ya que hemos usado la x y la y del alfabeto de 26 letras. Adicionalmente la x y la y pueden permutar entre sí de 2! maneras. Una vez formado este bloque de siete letras, quedamos con 19 letras restantes que podemos organizar de 19! maneras. El bloque lo podemos poner en cualquiera de los 20 espacios que hay entre las otras 19 letras, esto es $\binom{20}{1}$. Por el principio de multiplicación, obtenemos que podemos organizar las letras de $19! \cdot P_5^{24} \cdot 2 \cdot \binom{20}{1}$. Simplificando, obtenemos $20! \cdot P_5^{24} \cdot 2$.

6. Encuentre los dígitos impares entre 3000 y 8000 en donde no se repiten dígitos.

Solución:

$$\boxed{\{3,4,5,6,7\}}\ \boxed{\phantom{\{3,4,5,6,7\}}}\ \boxed{\phantom{\{3,4,5,6,7\}}}\ \boxed{\{1,3,5,7,9\}}$$

Podemos armar los siguientes dos conjuntos disyuntos:

1. La primer casilla pertenece a $\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap 1, 3, 5, 7, 9\} = \{3, 5, 7\}$.

   Así, tenemos P_1^3 formas de escoger la primer casilla, P_1^4 de escoger la última y P_2^8 de escoger las dos del medio. Por el principio de multiplicación obtenemos 672.

2. La primer casilla pertenece a $(\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap (\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap 1, 3, 5, 7, 9\}))^C = \{4, 6\}$.

   Así, tenemos P_1^2 formas de escoger la primer casilla, P_1^5 de escoger la última y P_2^8 de escoger las dos del medio. Por el principio de multiplicación obtenemos 560.

Dado que tenemos dos conjuntos disyuntos, podemos usar el principio de adición, así obteniendo $672 + 560 = 1232$ dígitos impares en total que cumplen la restricción.

7. Evalue $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$ donde $n \in \mathbb{N}$.

Solución:
Haciendo un truco algebraico, observe que:

$$\begin{aligned} k \cdot k! &= (k + 1 - 1) \cdot k! \\ &= (k+1)k! - k! \\ &= (k+1)! - k! \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos expresar la suma como:

$$2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \ldots + n! - (n-1)! + (n+1)! - n!$$

Cancelando términos,

$$\cancel{2!} - 1! + \cancel{3!} - \cancel{2!} + \cancel{4!} - \cancel{3!} + \ldots + \cancel{n!} - \cancel{(n-1)!} + (n+1)! - \cancel{n!}$$

Obteniendo,

$$(n+1)! - 1$$

8. Evalue

$$\frac{1}{(1+1)!} + \frac{2}{(2+1)!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Sea $S = \dfrac{1}{(1+1)!} + \dfrac{2}{(2+1)!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!}$.

Haciendo unos cálculos observamos que:

$$n = 1; \quad S = \frac{1}{2}$$

$$n = 2; \quad S = \frac{5}{6}$$

$$n = 3; \quad S = \frac{23}{24}$$

$$n = 4; \quad S = \frac{119}{120}$$

$$n = 5; \quad S = \frac{719}{720}$$

Hipótesis:

$$\text{Para } n, \quad S = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}.$$

Demostración por inducción:

1. Principio de inducción: Verificar que funciona cuando $k = 1$.

$$\frac{1}{(1+1)!} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = \frac{2!-1}{2!} = \frac{1}{2}$$

2. Hipótesis de inducción: Asumir que funciona cuando $n = k$.

$$S = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$$

3. Tesis de inducción: Demostrar que funciona cuando $n = k + 1$.

$$S = \frac{((k+1)+1)!-1}{((k+1)+1)!}$$

$$= \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$$

Usando la hipótesis de inducción tenemos que:

$$S + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$= \frac{(k+2)! - (k+2) + k + 1}{(k+2)!}$$

$$= \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$$

Así quedando demostrado que

$$S = \frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.