Viviana Márquez
Combinatoria - Profesor Julián Abril
Parcial 1, Marzo 15 de 2018

---

1. Calcular el número de formas en las que se pueden regalar 30 libros a 7 personas, en cada uno de los siguientes casos:

   a) Todos los libros son iguales.

   b) Todos los libros son iguales y cada persona recibe al menos un libro.

   c) Todos los libros son distintos.

   d) Todos los libros son distintos y cada persona recibe al menos un libro.

Solución:
En los siguientes ejercicios, las personas son las 7 cajas donde vamos a ubicar los 30 objetos.

a) Como cada persona puede recibir cualquier número de libros idénticos (k-composiciones débiles), esto es H^7_{30}.

$$H^7_{30} = \binom{30+7-1}{30} = 1,947,792.$$

b) Como cada persona debe recibir al menos un libro y los libros son idénticos, primero repartimos un libro a cada persona. Quedamos con 23 libros y repetimos el paso anterior.

$$H^7_{23} = \binom{23+7-1}{23} = 475,020.$$

c) Como todos los libros son distintos, pero el orden en que la persona reciba los libros no importa, tenemos que cada libro tiene 7 opciones donde ir. Esto es 30^7.

d) Para asegurar que cada persona reciba primero un libro, se reparte primero esos siete libros. Esto se puede hacer de $30P7$ formas. Con los 23 libros restantes se repite el mismo paso anterior. Por lo tanto, por el principio de multiplicación, el número total de formas es: $30P7 \cdot 23^7$.

2. Si lanzamos sobre una mesa 3 datos y observamos su puntuación. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?

Solución:
El orden de los dados no importa y cada dado tiene seis opciones:

Tenemos los siguientes conjuntos disyuntos:

1. Cuando todos los dígitos se repiten, esto es: $\binom{6}{1}$

2. Cuando dos dígitos se repiten. Esto es, debemos escoger dos números de los seis, lo cual podemos hacer de $\binom{6}{2}$ maneras. Pero lo multiplicamos por 2 dependiendo de cuál dígito se repite.

3. Cuando los tres dígitos son diferentes. Escogemos tres números de los seis. Esto es $\binom{6}{3}$.

Por el principio de adición, tenemos que la respuesta es:

$$\binom{6}{1} + 2 \cdot \binom{6}{2} + \binom{6}{3} =$$

$$6 + 2 \cdot 15 + 20 = 56$$

3. ¿Cuántos números mayores que $100,000$ se pueden escribir con las cifras $0, 3, 3, 5, 4, 6$?

Solución:
Tenemos seis casillas donde ubicar los seis dígitos:

$$\square\square\square\square\square\square$$

Esto lo podemos hacer de $\dfrac{6!}{2!}$ maneras ya que el 3 se repite dos veces. Pero adicionalmente, como los números deben ser mayores que $100,000$, no pueden comenzar por cero, así que debemos restar todos los que son de la forma:

$$\boxed{0}\square\square\square\square\square$$

Esto es $\dfrac{5!}{2!}$ porque el 3 también se repite dos veces en el conjunto de dígitos restantes. Por lo tanto la respuesta es:

$$\frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} = 360 - 60 = 300$$

4. Sea X un conjunto con n elementos. Considere el conjunto:

$$S = \{(I, J) \in \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(X) : I \subset J\}$$

Calcule $|S|$.

Solución:

$$|S| = \sum_{i=0}^{n} \left[\binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \right]$$

donde:

- Para $|I| = i$ hay $\binom{n}{i}$. Cuenta los elementos de $\mathbb{P}(X)$ de tamaño i.
- Para $|J| = j$ hay $\binom{i}{j}$. Cuenta los elementos de $\mathbb{P}(I)$ de tamaño j.

En esta fórmula se usa tanto el principio de adición (para obtener el número de elementos de $\mathbb{P}(X/I)$ de tamaño i/j que son disyuntos), como el principio de multiplicación (para obtener las parejas (I, J)).

Ejemplo:

Cuando $n = 3$:

$$|S| = \sum_{i=0}^{3} \left[\binom{3}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \right]$$

$$= \binom{3}{0} \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} + \binom{3}{1} \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} + \binom{3}{i} \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} + \binom{3}{3} \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j}$$

$$= \binom{3}{0} \left[\binom{0}{0} \right] + \binom{3}{1} \left[\binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right] + \binom{3}{2} \left[\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \right] + \binom{3}{3} \left[\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} \right]$$

$$= 1(1) + 3(1+1) + 3(1+2+1) + 1(1+3+3+1)$$

$$= 1 + 6 + 12 + 8$$

$$= 27$$

Es decir,

$|I| = 0$

I	J
$\emptyset$	$\emptyset$

$|I| = 0$ hay $1 \cdot 1 = 1$

$|I| = 1$

I	J
$\{1\}$	$\emptyset, \{1\}$
$\{2\}$	$\emptyset, \{2\}$
$\{3\}$	$\emptyset, \{3\}$

$|I| = 1$ hay $3 \cdot 2 = 6$

$|I| = 2$

I	J
$\{1, 2\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$
$\{1, 3\}$	$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}$

$|I| = 2$ hay $3 \cdot 4 = 12$

$|I| = 3$

I	J
$\{1, 2, 3\}$	$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

$|I| = 3$ hay $1 \cdot 8 = 8$

Así, en total hay $1 + 6 + 12 + 8 = 27$ parejas (I, J).