Análisis Combinatorio **2018-I**

Clase 9: 16 de abril

Profesor: Julián Abril *Apuntes por: Viviana Márquez*

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

9.1. Principio de palomar

1. (Física) Si m palomas ocupan n nidos y $m > n$, entonces al menos un nido tiene dos o más palomas en él.
2. (Combinatoria) Sean $k, n \in \mathbb{Z}^+$, si al menos $nk + 1$ objetos son distribuidos en n cajas, entonces al menos hay una caja con al menos $k + 1$ objetos.
3. (Conjuntista) Sean dos conjuntos X, Y, tal que $|X| = n$ y $|Y| = k$ y una función $f : x \to y$.
   a) Para todo f, si $n > k$, entonces f no es inyección.
   b) Si $n > kr$ para cierto $r \geq 1$ hay al menos $r + 1$ elementos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1} \in X$ tal que $f(x_1) = \ldots = f(x_{r+1})$.

Ejercicio 1: Demuestre que si en una habitación hay ocho personas, al menos dos de ellas cumplen el mismo día de la semana.

Solución:

- Cajas = días = $n = 7$.
- Palomas = personas $p = 8$.

Entonces,

$$p = nk + 1$$
$$8 = 7(k) + 1$$
$$k = 1$$

Así, por el principio de palomar, $k + 1 = 1 + 1 = 2$ personas al menos cumplen el mismo día de la semana.

Ejercicio 2: En una lista de 600,000 palabras donde cada palabra consta de cuatro o menos letras (de las 27 letras del idioma español), ¿pueden ser las 600,000 palabras distintas?

Solución:

Sea t_n las palabras de tamaño n. Entonces tenemos que:

- $t_1 = 27^1$
- $t_2 = 27^2$
- $t_3 = 27^3$
- $t_4 = 27^4$

Por el principio de la adición tenemos que el total de las palabras posibles es:

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \\ &= 27^1 + 27^2 + 27^3 + 27^4 \\ &= 551,880 \end{aligned}$$

- Cajas = posibles palabras = $n = 551,880$.
- Palomas = palabras en la lista $p = 600,000$.

Entonces,

$$\begin{aligned} p &= nk + 1 \\ 600,000 &= 551,880(k) + 1 \\ k &= 1 && \text{(usando la función piso)} \end{aligned}$$

Así, por el principio de palomar, $k + 1 = 1 + 1 = 2$. Es decir, al menos dos palabras tienen que ser igual.

Ejercicio 3: En una fiesta con cien personas, algunos de los invitados se saludan dándose la mano y otros no. Demostrar que al menos dos personas han saludado el mismo número de personas.

Solución:

En primer lugar, hay que suponer que nadie se saludo a sí mismo y que todo el mundo saludó al menos a otra persona. Así, cada persona puede potencialmente saludar a otras 99 personas. Por lo tanto,

- Cajas = personas a saludar = $n = 99$.
- Palomas = personas que hay en la fiesta $p = 100$.

Entonces,

$$p = nk + 1$$
$$100 = 99(k) + 1$$
$$k = 1$$

Así, por el principio de palomar, $k + 1 = 1 + 1 = 2$. Es decir, al menos dos personas saludan el mismo número de personas en la fiesta.

Ejercicio 4: ¿Cuántas veces debemos lanzar un sólo dado para obtener el mismo resultado al menos

a) dos veces.

b) tres veces.

c) m veces.

Solución:

a) dos veces.

- Cajas = números en un dado = $n = 6$.
- Número de veces para obtener el mismo resultado $k + 1 = 2$.

Entonces,

$$p = nk + 1$$
$$p = 6(2 - 1) + 1$$
$$p = 7$$

Así, por el principio de palomar, debemos lanzar el dado al menos 7 veces par obtener el mismo resultado 2 veces.

b) tres veces.

- Cajas = números en un dado = $n = 6$.
- Número de veces para obtener el mismo resultado $k + 1 = 3$.

Entonces,

$$p = nk + 1$$
$$p = 6(3 - 1) + 1$$
$$p = 13$$

Así, por el principio de palomar, debemos lanzar el dado al menos 13 veces par obtener el mismo resultado 3 veces.

c) m veces.

- Cajas = números en un dado = $n = 6$.
- Número de veces para obtener el mismo resultado $k + 1 = m$.

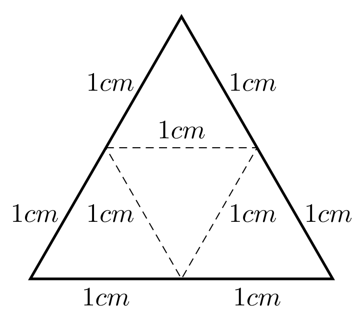
Entonces,

$$p = nk + 1$$
$$p = 6(m - 1) + 1$$
$$p = 6m - 5$$

Así, por el principio de palomar, debemos lanzar el dado al menos $6m - 5$ veces par obtener el mismo resultado m veces.

Ejercicio 5: ¿Puede la región triangular delimitada por un triángulo equilátero de dos centímetros de lado contener cinco puntos de forma que no hayan dos a una distancia menor o igual que uno?

Solución:



Usando las propiedades de los triángulos equiláteros podemos dividir el triángulo en cuatro subtriángulos equiláteros. Es claro que si dos puntos están en el mismo compartimiento, están a una distancia menor o igual que uno. Así pues,

- Cajas = subtriángulos = $n = 4$.
- Palomas = puntos $p = 5$.

Entonces,

$$p = nk + 1$$
$$5 = 4(k) + 1$$
$$k = 1$$

Así, por el principio de palomar, $k+1=1+1=2$. Es decir, al menos dos puntos están a una distancia menor o igual que uno. Ósea, un triángulo equilátero con lados de dos centímetros no pueden contener dos puntos con esta característica.

Ejercicio 6: Sea X un conjunto arbitrario de 20 números naturales. Demostrar que hay al menos dos elementos de X cuya diferencia es un múltiplo de 19.

Solución:

En primer lugar, nótese que cada elemento del conjunto pertenece a una clase de equivalencia módulo 19 aquí así:

- $a \cong 0 \mod 19$
- $b \cong 1 \mod 19$
- $c \cong 2 \mod 19$
- $\vdots$
- $s \cong 18 \mod 19$

Si dos elementos pertenecen a la misma clase de equivalencia, la diferencia de estos dos elementos será un múltiplo de 19.

Así,

- Cajas = clases de equivalencia $= n = 19$.
- Palomas = número de elementos en el conjunto $p = 20$.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
p &= nk+1 \\
20 &= 19(k)+1 \\
k &= 1
\end{aligned}
$$

Así, por el principio de palomar, $k+1=1+1=2$. Es decir, al menos dos elementos del conjunto tienen una diferencia que es un múltiplo de 19.

Tarea

N/A

De la lista anterior, se remueven el ejercicio 30 y se vuelve a agregar el 28.