Análisis Combinatorio **2018-I**

Clase 7: 2 de abril

Profesor: Julián Abril *Apuntes por: Viviana Márquez*

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

7.1 El teorema binomial

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}x^0y^n \\
&= \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r
\end{aligned}
$$

Demostración:
Por método combinatorio.

Tenemos que $(x+y)^n$ es:

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n \text{ veces}}$$

Nótese que cada término tiene la forma $c_k x^{n-k}y^k$, para k entre 0 y n. El coeficiente de cada término es k formas de escoger y de los n factores de $(x+y)$, i.e., $\binom{n}{k}$.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} + y^k$$

Por ejemplo:

$$(x+y)^2 = c_0 \underbrace{x^{n-k}y^k}_{k=0} + c_1 \underbrace{x^{n-k}y^k}_{k=1} + c_2 \underbrace{x^{n-k}y^k}_{k=2}$$

$$= \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} x^k + y^{2-k}$$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

7.1.1 Identidades

1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
2. $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}, r \geq 1$.
3. $\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$.
4. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.
5. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

Ejemplo 1:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

Solución:

a) Usando el teorema binomial: $x = 1$, $y = 1$

b) $\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{vacío}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\text{singletons}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\text{duplas}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{todos}} = |P(x)| = 2^n$

Ejemplo 2:

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = 0$$

Solución:

Usando el teorema binomial: $x = -1$, $y = 1$.

Ejemplo 3*: Demostrar que:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}$$

Solución:

Usando el ejercicio anterior, vemos que:

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots=0$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{2k+1}$$

$$2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}\right]=2^n$$

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}\right]=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{2k}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}$$

Ejemplo 4:

$$\sum_{r=0}^{n} r \cdot \binom{n}{r} = n2^{n-1}$$

Solución:

$x = 1$, entonces:

$$(1+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} y^r$$

Derivando respecto a y, obtenemos:

$$n(1+y)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \binom{n}{r} y^{r-1}$$

Cuando $y = 1$,

$$n2^{n-1} = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \binom{n}{r}$$

Otra forma de resolverlo es usando la identidad $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$.

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$$

$$r \cdot \binom{n}{r} = n \cdot \binom{n-1}{r-1}$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n} r \cdot \binom{n}{r} &= \sum_{r=0}^{n} n \cdot \binom{n-1}{r-1} \\
&= n \cdot \sum_{r=0}^{n} \binom{n-1}{r-1} \\
&= n \cdot 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Ejemplo 5:

$$\sum_{r=0}^{n} r^2 \cdot \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}$$

Solución:

$$\sum_{r=0}^{n} r^2 \cdot \binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n} r \cdot n\binom{n-1}{r-1}$$

Sea $s = r - 1$,

$$\sum_{r=0}^{n} r \cdot n\binom{n-1}{r-1} = n \cdot \sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\binom{n-1}{s}$$

$$= n \cdot \left[\sum_{s=0}^{n-1} s\binom{n-1}{s} + \sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}\right]$$

$$= n \cdot \left[n2^{n-2} + 2^{n-2}\right]$$

$$= n(n+1)2^{n-2}$$

Ejemplo 5b:

$$\sum_{r=0}^{n} r^3 \cdot \binom{n}{r} = n^2(n+3)2^{n-3}$$

Ejemplo 5c:

$$\sum_{r=0}^{n} r^k \cdot \binom{n}{r}$$

7.1.2 Identidad de Vandermonde

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}=\binom{m+n}{r}$$

Demostración:
Observando la igualdad podemos determinar que vamos a usar el principió de la multiplicación y el principio de la adición.

Consideremos el conjunto

$$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m,b_1,b_2,\ldots,b_n\}$$

Sea $C\subseteq A$, $|C|=r$. Hay $\binom{m+n}{r}$ de ellos.

Supongamos que en C hay i elementos del tipo a_α ($\alpha\in\{1,2,\ldots,m\}$,i=0,1,2,$\ldots,r$). Entonces C puede en primer lugar ser conformado de $\binom{m}{i}$ maneras diferentes.

Para cada uno de estos hay $\binom{n}{r-i}$ maneras de elegir a b_α. Por lo tanto, por el principió de multiplicación hay $\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$ maneras y por el principio de adición obtenemos que:

$$\binom{m+n}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$$

Ejemplo 6:

Demostrar

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i}\\&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} && \text{(Usando la identidad } \tbinom{n}{k}=\tbinom{n}{n-k}\text{)}\\&=\binom{n+n}{n}=\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

Ejemplo 7:

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} H_1^1 & H_2^1 & H_3^1 \\ H_1^2 & H_2^2 & H_3^2 \\ H_1^3 & H_2^3 & H_3^3 \end{bmatrix}$$

cuyas entradas son $H_r^n - \binom{r+n-1}{r}$. ¿Cuál es $det(A)$?

Solución:

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} H_1^1 & H_2^1 & H_3^1 \\ H_1^2 & H_2^2 & H_3^2 \\ H_1^3 & H_2^3 & H_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 1$$

Ejemplo 8:

En general, demuestre que $det(A) = 1$ si $A = (H_r^n)_{k \times k}$.

Solución:

Consideremos las matrices de tamaño $k \times k$ $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ definidas por $b_{ij} = \binom{i}{j}$ y $c_{ij} = \binom{j-1}{j-i}$ respectivamente. Es decir,

$$B = \begin{bmatrix} \binom{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \binom{k}{3} & \dots & \binom{k}{k} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \dots & \binom{k-1}{k-1} \\ 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{k-1}{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora vamos a demostrar que $A = BC$.

$$a_{nr} = \sum_{i=1}^{k} b_{ni}c_{ir} = \sum ki = 1\binom{n}{i}\binom{r-1}{r-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \binom{n}{i}\binom{r-1}{r-i}$$

$$= \binom{r+n-1}{r}$$

$$= H_r^n$$

Así, hemos demostrado que $A = BC$. Ahora podemos ver que,

$$det(A) = det(BC) = det(B)det(C)$$

$$= \left[\binom{1}{1} \cdot \binom{2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{k}{k}\right] \cdot \left[\binom{0}{0} \cdot \binom{1}{0} \cdot \dots \cdot \binom{k-1}{0}\right] = 1.$$

Tarea

Capitulo 2 del libro - Ejercicios 24-31.