

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

1.1 Principios básicos del conteo

1.1.1 Principio de la adición

- Para contar los elementos de la unión de conjuntos que no tienen elementos en común.
- Se suman los cardinales de cada uno de los conjuntos.
- Notación conjuntista:

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|$$

con $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Ejemplo 1:

Encuentre el número de pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $x^2 + y^2 \leq 5$.

Solución:

$$S_i = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; x^2 + y^2 = i, i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

$$S_0 = \{(0, 0)\}$$

$$S_1 = \{(0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)\}$$

$$S_2 = \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$$

$$S_3 = \emptyset$$

$$S_4 = \{(0, 2), (0, -2), (2, 0), (-2, 0)\}$$

$$S_5 = \{(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2), (2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)\}$$

$$\left| \bigcup_{i=0}^5 S_i \right| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21$$

1.1.2 Principio de la multiplicación

- Para contar los elementos del producto cartesiano entre conjuntos.
- Se multiplican los cardinales de cada uno de los conjuntos.
- Notación conjuntista:

$$\left| \prod_{i=1}^r A_i \right| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_r| = \prod_{i=1}^r |A_i|.$$

Ejemplo 2:

Encuentre el número de todos los divisores de 600.

Solución:

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, sabemos que $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Por lo tanto, si $n|600$, entonces n es de la forma $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$. Así pues,

$$B_1 = \{n; n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z\} \text{ con } 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$$

$$B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\}$$

El número de divisores de 600 son las tripletas de B_2 donde $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, $y \in \{0, 1\}$, $z \in \{0, 1, 2\}$. De tal modo, obtenemos que,

$$\left| \prod_{i=1}^r A_i \right| = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Ejemplo 3:

Sea $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ y $S = \{(a, b, c) \in X^3; a < b \text{ y } a < c\}$. Encuentre $|S|$.

Solución:

Fijemos $k = a \in \{1, \dots, 99\}$, así obtenemos triplas de la forma (k, b, c) donde b y c pueden ser escogidos de los $100 - k$ términos mayores que k . Como b y c son dos elementos, tenemos $(100 - k)^2$ posibilidades (por el principio de multiplicación) de 99 ternas disyuntas. De esta forma, usando el principio de la adición, obtenemos que la respuesta es $99^2 + 98^2 + \dots + 1^2$. Más claro aún,

$$|S| = \sum_{i=1}^{99} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6} = 328,350.$$

1.2 Sucesión k -aria

- Una sucesión de longitud n donde cada elemento es un entero de $0, 1, \dots, k - 1$.

Ejemplo 4.1:

$\{0, 1\}$ 2-arias. (Binarias).

Ejemplo 4.2:

Sea $k = 2$ y $n = 3$. Encuentre las sucesiones k -arias correspondiente.

Solución:

$\{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$

EJERCICIO 1

Dados $n, k \in \mathbb{N}$, ¿de cuántas maneras diferentes podemos tomar sucesiones k -arias de longitud n ?

Solución:

$$\underbrace{\boxed{k} \boxed{k} \boxed{k} \boxed{k} \dots \boxed{k}}_n$$

Entonces, por el principio de multiplicación, obtenemos k^n .

1.3 Permutaciones

- Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto dado de n objetos distintos. Para $0 \leq r$, una r -permutación de A es una forma de arreglar cualesquiera r objetos de A en una fila.
- Cuando $r = n$ se llama permutación.

Ejemplo 5:

¿Cuáles son las 2-permutaciones de $A = \{a, b, c\}$.

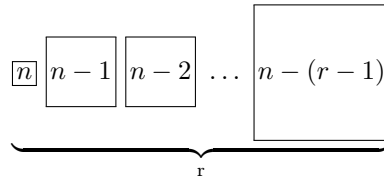
Solución:

- a,b
- a,c
- b,c
- b,a
- c,a
- c,b

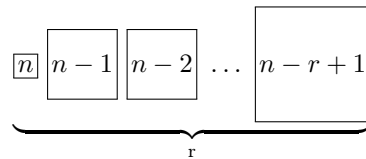
EJERCICIO 2

¿Cuántas r permutaciones se pueden formar en un conjunto de n elementos?

Solución:



Porque hay r casillas y la relación del número de elementos de cada casilla con su posición es uno menos. De tal forma,



Así,

$$P_r^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

En adición, usando la notación del factorial, $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, podemos decir que,

$$P_r^n = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(r-1)) \cdot (n-r) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Nota: $0! = 1$

¿Por qué?

- Por convención.
- $n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)} \Rightarrow 0! = \frac{1!}{1} = 1$
- ¿Cómo ordenamos 0 elementos? De una única manera porque no hay nada que ordenar.

Ejemplo 6:

Tenemos un alfabeto de 26 letras. ¿Cuál es el número de palabras de 5 letras que podemos formar, tal que su primer y su última letra sean vocales (distintas) y las letras del medio sean consonantes distintas?

Solución:

$$\boxed{5} \boxed{21} \boxed{20} \boxed{19} \boxed{4}$$

$$P_3^{21} \cdot P_2^5 = \frac{21!}{(21-3)!} \cdot \frac{5!}{(5-2)!} = 159,600.$$

Ejemplo 7:

Consideremos los números entre 20,000 y 70,000. Encuentre los enteros pares sin dígitos repetidos.

Solución:

$$\boxed{\{2, 3, 4, 5, 6\}} \quad \boxed{\phantom{\{ \}}} \quad \boxed{\phantom{\{ \}}} \quad \boxed{\phantom{\{ \}}} \quad \boxed{\{2, 4, 6, 8, 0\}}$$

$$\{2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 4, 6, 8, 0\} = \{2, 4, 6\}$$

Sea a la primer casilla. Por casos:

a) $a \in \{2, 4, 6\}$

$$\boxed{3} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{4}$$

donde las casillas del medio son P_3^8 . Por el principio de multiplicación, obtenemos $3 \cdot 336 \cdot 4 = 4,032$.

b) $a \in \{3, 5\}$

$$\boxed{2} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{5}$$

donde las casillas del medio son P_3^8 . Por el principio de multiplicación, obtenemos $2 \cdot 336 \cdot 5 = 3,360$.

Y por el principio de adición, el resultado es $4,032 + 3,360 = 7,392$.

Tarea

Considere 7 niños y 3 niñas. Debemos organizarlos en una fila en los siguientes casos:

- a) Las tres niñas deben ir juntas.
- b) Dos niñas no pueden estar juntas, y dos niños deben ir al final de la fila.