Análisis Combinatorio **2018-I**

Clase 1: 29 de enero

Profesor: Julián Abril *Apuntes por: Viviana Márquez*

Libro: *Principles and techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong & Koh Khee-Meng. 1992.*

1.1 Principios básicos del conteo

1.1.1 Principio de la adición

- Para contar los elementos de la unión de conjuntos que no tienen elementos en común.
- Se suman los cardinales de cada uno de los conjuntos.
- Notación conjuntista:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$$

con $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Ejemplo 1:
Encuentre el número de pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $x^2 + y^2 \leq 5$.

Solución:

$$S_i = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; x^2 + y^2 = i, i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{(0,0)\}\\
S_1 &= \{(0,1),(1,0),(0,-1),(-1,0)\}\\
S_2 &= \{(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)\}\\
S_3 &= \emptyset\\
S_4 &= \{(0,2),(0,-2),(2,0),(-2,0)\}\\
S_5 &= \{(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2),(2,1),(-2,1),(2,-1),(-2,-1)\}
\end{aligned}$$

$$\left|\bigcup_{i=0}^{5} S_i\right| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21$$

1.1.2 Principio de la multiplicación

- Para contar los elementos del producto cartesiano entre conjuntos.
- Se multiplican los cardinales de cada uno de los conjuntos.
- Notación conjuntista:

$$\left|\prod_{i=1}^{r} A_i\right| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_r| = \prod_{i=1}^{r} |A_i| \,.$$

Ejemplo 2:
Encuentre el número de todos los divisores de 600.

Solución:
Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, sabemos que $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Por lo tanto, si $n|600$, entonces n es de la forma $n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$. Así pues,

$$B_1 = \{n; n = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z\} \text{ con } 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2$$
$$B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\}$$

El número de divisores de 600 son las tripletas de B_2 donde $x \in \{0, 1, 2, 3\}, y \in \{0, 1\}, z \in \{0, 1, 2\}$. De tal modo, obtenemos que,

$$\left|\prod_{i=1}^{r} A_i\right| = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

Ejemplo 3:
Sea $X = \{1, 2, \ldots, 100\}$ y $S = \{(a, b, c) \in X^3; a < b \text{ y } a < c\}$. Encuentre $|S|$.

Solución:
Fijemos $k = a \in \{1, \ldots, 99\}$, así obtenemos triplas de la forma (k, b, c) donde b y c pueden ser escogidos de los $100 - k$ términos mayores que k. Como b y c son dos elementos, tenemos $(100 - k)^2$ posibilidades (por el principio de multiplicación) de 99 ternas disyuntas. De esta forma, usando el principio de la adición, obtenemos que la respuesta es $99^2 + 98^2 + \ldots + 1^2$. Más claro aún,

$$|S| = \sum_{i=1}^{99} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6} = 328,350.$$

1.2 Sucesión k-aria

- Una sucesión de longitud n donde cada elemento es un entero de $0, 1, \dots, k-1$.

Ejemplo 4.1:
$\{0, 1\}$ 2-arias. (Binarias).

Ejemplo 4.2:
Sea $k = 2$ y $n = 3$. Encuentre las sucesiones k-arias correspondiente.

Solución:
$\{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$

EJERCICIO 1
Dados $n, k \in \mathbb{N}$, ¿de cuántas maneras diferentes podemos tomar sucesiones k-arias de longitud n?

Solución:

$$\underbrace{\boxed{k}\ \boxed{k}\ \boxed{k}\ \boxed{k}\ \dots\ \boxed{k}}_{\text{n}}$$

Entonces, por el principio de multiplicación, obtenemos k^n.

1.3 Permutaciones

- Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto dado de n objetos distintos. Para $0 \leq r$, una r-permutación de A es una forma de arreglar cualesquiera r objetos de A en una fila.
- Cuando $r = n$ se llama permutación.

Ejemplo 5:
¿Cuáles son las 2-permutaciones de $A = \{a, b, c\}$.

Solución:

- a,b
- a,c
- b,c
- b,a
- c,a
- c,b

EJERCICIO 2

¿Cuántas r permutaciones se pueden formar en un conjunto de n elementos?

Solución:

$$\underbrace{\boxed{n}\ \boxed{n-1}\ \boxed{n-2}\ \dots\ \boxed{n-(r-1)}}_{\text{r}}$$

Porque hay r casillas y la relación del número de elementos de cada casilla con su posición es uno menos. De tal forma,

$$\underbrace{\boxed{n}\ \boxed{n-1}\ \boxed{n-2}\ \dots\ \boxed{n-r+1}}_{\text{r}}$$

Así,

$$P_r^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1).$$

En adición, usando la notación del factorial, $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, podemos decir que,

$$P_r^n = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1)) \cdot (n-r) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Nota: $0! = 1$

¿Por qué?

- Por convención.
- $n! = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)} \Rightarrow 0! = \dfrac{1!}{1} = 1$
- ¿Cómo ordenamos 0 elementos? De una única manera porque no hay nada que ordenar.

Ejemplo 6:
Tenemos un alfabeto de 26 letras. ¿Cuál es el número de palabras de 5 letras que podemos formar, tal que su primer y su última letra sean vocales (distintas) y las letras del medio sean consonantes distintas?

Solución:

$$\boxed{5}\ \boxed{21}\ \boxed{20}\ \boxed{19}\ \boxed{4}$$

$$P_3^{21} \cdot P_2^5 = \frac{21!}{(21-3)!} \cdot \frac{5!}{(5-2)!} = 159,600.$$

Ejemplo 7:
Consideremos los números entre $20,000$ y $70,000$. Encuentre los enteros pares sin dígitos repetidos.

Solución:

$$\boxed{\{2,3,4,5,6\}}\ \boxed{\phantom{\{2,3,4\}}}\ \boxed{\phantom{\{2,3,4\}}}\ \boxed{\phantom{\{2,3,4\}}}\ \boxed{\{2,4,6,8,0\}}$$

$$\{2,3,4,5,6\} \cap \{2,4,6,8,0\} = \{2,4,6\}$$

Sea a la primer casilla. Por casos:

a) $a \in \{2,4,6\}$

$$\boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{4}$$

donde las casillas del medio son P_3^8. Por el principio de multiplicación, obtenemos $3 \cdot 336 \cdot 4 = 4,032$.

b) $a \in \{3,5\}$

$$\boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{5}$$

donde las casillas del medio son P_3^8. Por el principio de multiplicación, obtenemos $2 \cdot 336 \cdot 5 = 3,360$.

Y por el principio de adición, el resultado es $4,032 + 3,360 = 7,392$.

Tarea

Considere 7 niños y 3 niñas. Debemos organizarlos en una fila en los siguientes casos:

a) Las tres niñas deben ir juntas.

b) Dos niñas no pueden estar juntas, y dos niños deben ir al final de la fila.