

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen 1

3. Supremum und Infimum 1

II Folgen und Reihen 2

5. Folgen 2

- 5.1 Folgen 2
- 5.2 Konvergenz und Divergenz einer Folge 2
- 5.3 Rechnen mit Grenzwerten 2
- 5.4 Monotonie und Konvergenz 2
- 5.5 Teilfolgen 3
- 5.6 Limes superior und Limes inferior 3
- 5.7 Cauchy Folgen 3

6. Grenzwerte von Funktionen 3

- 6.1 Der Grenzwert einer Funktion 3

7. Rechnen mit Grenzwerten 4

- 7.1 Prinzip 4
- 7.2 (Un)-entscheidbare Situationen 4
- 7.3 Das Sandwich Theorem 4
- 7.4 Dominanzen 4
- 7.5 Der Wurzeltrick 4
- 7.6 Fund.lim. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ 4
- 7.7 Fundamentallimes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ 5
- 7.8 Der Satz von Bernoulli-de l'Hôpital 5
- 7.9 Der $e^{\ln(x)}$ -Trick 5
- 7.10 Taylor, der Retter 5

8. Reihen 5

- 8.1 Konvergenzkriterien 5
- 8.X Reihen konkret ausrechnen 7

9. Potenzreihen 7

- 9.2 Differenziation und Integration von Potenzreihen 7

III Differenzialrech. in \mathbb{R} 7

10. Stetigkeit 7

- 10.1 Stetige Funktionen 7
- 10.2 Rechenregeln für stetige Funktionen 7
- 10.3 Äquivalente Kriterien 7
- 10.4 Gleichmässige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit 8
- 10.5 Der Zwischenwertsatz 8

13. Differenzialrechnung 8

- 13.1 Die Ableitung 8
- 13.2 Differenzierbarkeit 8
- 13.3 Stetigkeit, Differenzierbarkeit und der Raum $C^1(\Omega)$ 8
- 13.4 Ableitungsregeln 8
- 13.5 Die Kettenregel 8
- 13.6 Der Umkehrsatz 9
- 13.7 Anwendung der Ableitungsregeln auf die Untersuchung der Differenzierbarkeit 9
- 13.8 Höhere Abl. und der Raum $C^m(\Omega)$ 9
- 13.9 Monotone und Konvexe Funktionen 9
- 13.10 Der Mittelwertsatz 9

14. Die Taylorsche Formeln 9

- 14.1 Das Taylorpolynom und die Taylorsche Formel 10

15. Folgen stetiger Funktionen 10

- 15.1 Punktweise vs. Gleichmässige Konvergenz 10

IV Integralrechnung in \mathbb{R} 10

16. Unbestimmte Integrale 10

- 16.1-16.2 Elementare Integrale 10
- 16.3 Direkte Integrale 10
- 16.4 Partielle Integration 11
- 16.6 Die Substitutionsregel 11
- 16.X Logarithmisches Integrieren 11
- 16.X Partialbruchzerlegung (PBZ) 11

17. Bestimmte Integrale 11

- 17.1 Definition 11
- 17.2 Eigenschaften 12

18. Spezielle Funktionen 12

- 18.1 Die Gamma-Funktion 12

V Differenzialgleichungen 12

21 Differenzialgleichungen: Grundbegriffe 12

- 21.1 Differenzialgleichungen 12
- 21.2 Anfangswertprobleme 12
- 21.3 Grundprinzip für lineare, inhomogene Differenzialgleichungen 12

22. Differenzialgleichungen erster Ordnung 12

- 22.1 Differenzialgleichungen erster Ordnung 12
- 22.2 Variation der Konstanten 12

23. Differenzialgleichungen n -ter Ordnung 12

- 23.1 Lineare, homogene Differenzialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 12
- 23.2 Lineare, inhomogene Differenzialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten 13

24. Systeme von Differenzialgleichungen 13

- 24.1 Homogene Systeme von Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten 13
- 24.2 Inhomogene Systeme von Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten 13
- 24.3 Systeme von Differenzialgleichungen erster Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten 13

VI Differentialrech. im \mathbb{R}^n 14

1. Funktionen von mehreren Variablen und partielle Ableitungen 14

- 1.1 Funktionen von mehreren Variablen 14
- 1.2 Partielle Ableitungen 14
- 1.3 Der Satz von Schwarz 14
- 1.4 Vektorwertige Funktionen 14

2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n 14

- 2.1 Stetigkeit in \mathbb{R}^n 14
- 2.2 Differenzierbarkeit 15

4. Taylorentwicklung für Funktionen mehrerer Variablen 15

- 4.1 Funktionen zweier Variablen 15

7. Extremwertaufgaben in mehreren Dimensionen 15

- 7.1 Extremwertaufgaben in \mathbb{R}^n ohne Nebenbedingungen 15

VII Integralrechnung im \mathbb{R}^n 16

11. Integration auf Quadern und der Satz von Fubini 16

- 11.1 Integration auf Quadern in \mathbb{R}^n 16
- 11.2 Integration auf Quadern in \mathbb{R}^n 16

12. Integration auf Normalbereichen 16

- 12.1 Normalbereiche in \mathbb{R}^2 16
- 12.2 Normalbereiche in \mathbb{R}^n 17
- 12.3 Der Skalierungstrick 17

13. Die Substitutionsregel 17

- 13.1 Die Substitutionsregel in \mathbb{R}^2 17
- 13.2 Die Substitutionsregel in \mathbb{R}^n 17
- 13.3 Wichtige Koordinatentransformationen 18

VIII Vektoranalysis 18

16. Grundbegriffe der Vektoranalysis 18

- 16.2 Differentialoperatoren 18

18. Wegintegrale 18

- 18.1 Definition und erste Beispiele 18
- 18.2 Potenzialfelder 19

20. Der Satz von Green in der Ebene 19

Andere Integrale 20

- Trigonometrie 20
- Trigonometrische Identitäten 20
- Trigonometrische Funktionen als Exponentialfunktionen 20
- Mitternachtsformel 20
- Komplexe Zahlen 20

Teil I

Grundlagen

3. Supremum und Infimum

Def. (Supremum und Infimum) Das Supremum von einer Menge A (geschrieben $\sup A$) ist die kleinste obere Schranke von A . Das Infimum von A (geschrieben $\inf A$) ist die grösste untere Schranke von A . Falls A nach oben und/oder nach unten unbeschränkt ist, so setzen wir

$$\sup A = +\infty, \quad \inf A = -\infty.$$

Bem: Supremum und Infimum einer Menge A sind immer eindeutig, müssen aber kein Element der Menge A sein.

Def. (Maximum und Minimum) Falls aber $\sup A \in A$, so heisst $\sup A$ das *Maximum* von A und geschrieben wird

$$\sup A = \max A.$$

Analog, falls $\inf A \in A$, so heisst $\inf A$ das *Minimum* von A und man notiert

$$\inf A = \min A.$$

Thm. (Rechnen mit sup/inf)

Seien $B, C \subset \mathbb{R}$ nicht leer, dann gelten die folgenden Formeln

$$\sup(B + C) = \sup B + \sup C,$$

$$\inf(B + C) = \inf B + \inf C,$$

$$\sup(B \cup C) = \max\{\sup B, \sup C\},$$

$$\inf(B \cup C) = \min\{\inf B, \inf C\}.$$

Dabei bezeichnet $B + C$ die folgende Menge

$$B + C := \{b + c \mid b \in B, c \in C\}.$$

Bestimmung von Supremum und Infimum

Trick: Zuerst ein paar Terme aufschreiben, um ein Gefühl für die Situation zu kriegen.

Trick: Zusammengesetzte Ausdrücke gemäss Satz als $B + C$ oder $B \cup C$ auffassen und dann separat lösen. Bei $B \cup C$ kann man z.B. die Menge als Folge aufschreiben und in gerade (B) und ungerade (C) Glieder unterteilen.

Teil II Folgen und Reihen

5. Folgen

5.1 Folgen

Def. Eine *Folge* ist eine geordnete Liste von Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Eine reelle Folge definiert also eine Abbildung

$$a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Bem: Analog können wir auch Folgen nach \mathbb{R}^n , \mathbb{C} oder anderen Räumen betrachten.

Bem: Darstellungsmöglichkeiten: explizit, oder rekursiv.

5.2 Konvergenz und Divergenz einer Folge

5.2.1 Konvergenz

Def. Eine Folge a_n *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: |a_n - a| < \epsilon.$$

Notiert wird

$$\lim_{n \rightarrow \text{inf}} a_n = a.$$

Bem: Man sagt, also dass der Grenzwert *existiert*, falls der Limes nicht $\pm\infty$ ist, und nicht $\pm c \neq 0$ ist. D.h. wenn der Grenzwert genau eine einzige Zahl $a \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ ist, sagt man, dass er *existiert*.

Thm. Grenzwerte sind eindeutig. Genauer: Ist a_n sowohl gegen a als auch gegen b konvergent, so gilt $a = b$.

Beweis eines Grenzwertes mittels der Definition

Vorgehen: Ungleichung mit Definition von und Grenzwert aufschreiben, a_n und a einsetzen, nach n (von a_n) auflösen, bzw. Ungleichung formulieren.

Bsp: **Z.Z.:** $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

$$|a_n - a| = \left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \epsilon \implies n < (\epsilon + 1)^n.$$

Trick: Die letzte Ungleichung ist nicht einfach zu lösen, aber es gibt einen Trick dafür: Wir formen sie in eine stärkere aber einfachere Ungleichung um, anhand des binomischen Lehrsatzes, meistens genügt es dafür das zweite oder dritte Glied zu nehmen:

$$(1 + \epsilon)^n = \underbrace{1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2}_{\geq 0} + \underbrace{\dots + \epsilon^n}_{\geq 0} \geq \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$$

Die Idee ist jetzt, die Ungleichung $n < (\epsilon + 1)^n$ durch

$$n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2$$

zu ersetzen. Die neue Ungleichung ist stärker, da jede Lösung der zweiten Ungleichung auch eine Lösung der ersten Ungleichung ist.

$$n < \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 \implies 1 < \frac{(n-1)}{2}\epsilon^2 \implies \frac{2}{\epsilon^2} + 1 < n$$

Das heisst für ein gegebenes ϵ , wenn wir N so wählen:

$$N := \left\lceil \frac{2}{\epsilon^2} + 1 \right\rceil \quad \text{dann gilt} \quad \forall n \geq N: \left| n^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \epsilon$$

Das heisst, alle Folgeglieder sind beliebig nahe an 1, was der Definition $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ entspricht.

5.2.2 Divergenz

Def. Eine Folge a_n ist *divergent*, falls

$$\forall K > 0 \exists N = N(K) \in \mathbb{N}, \text{ s.d. } \forall n \geq N: |a_n| > K.$$

Bem: Einfach ausgedrückt: Eine Folge a_n divergiert, falls für jede beliebig gross gewählte Zahl $K > 0$ eine von K abhängige grosse Zahl N existiert, derart dass alle Folgeglieder a_n mit $n \geq N$ im Betrag grösser als K sind.

Wichtig: Da die Zahl K beliebig gross gewählt werden kann, bedeutet dies, dass für grosse n die Folgeglieder a_n beliebig gross sein können.

Vorgehen: (Bew. von Diverg. mittels Def.)

Wähle $K > 0$ beliebig gross, finde ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\forall n \geq N$ gilt: $n > \dots K \dots$. D.h. löse nach n aus a_n auf.

5.3 Rechnen mit Grenzwerten

5.3.1 Rechenregeln

Für die Bestimmung von Grenzwerten werden die folgenden Regeln benutzt:

Thm. Sind a_n und b_n konvergent mit Grenzwerten a bzw. b , dann folgt

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- Falls $b_n, b \neq 0$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
- Falls $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$

Trick: Man schreibt also einen Faktor vor den Nenner oder Zähler, den man gerne kürzen möchte, streicht ihn dann heraus und fährt mit einem Term der sich für die Regeln besser eignet weiter.

Trick: Das war eine Schreibweise, wie man sich den Limes sparen kann.

Trick: Grösste Potenz herausklammern, kürzen, so dass die Faktoren der dominanten Potenzen übrig bleiben und ein Verhältnis erzeugen. Kann man auch im Kopf machen.

Trick: Mit 1 bzw. dem Konjugierten des Nenners, Zählers oder Terms multiplizieren.

Trick: Wie vorher Faktor herausklammern, den man kürzen möchte.

5.3.2 Das Sandwich Theorem

Thm. (Sandwich Theorem) Es seien die drei Folgen $b_n \leq a_n \leq c_n$ gegeben. Falls b_n und c_n konvergent sind mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, so ist auch a_n konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Trick: Es reicht wenn die Abschätzung erst ab eine gewissen n_0 gilt.

Trick:

- Untere Abschätzung:** Zähler kleiner und/oder Nenner grösser
- Obere Abschätzung:** Zähler grösser und/oder Nenner kleiner

5.4 Monotonie und Konvergenz

5.4.1 Monotonie und Beschränktheit

Def. Eine Folge a_n heisst

- (streng) *monoton wachsend*, falls $a_n (<) \leq a_{n+1} \quad \forall n$ ab einem gewissen n_0 .
- (streng) *monoton fallend*, falls $a_n (>) \geq a_{n+1} \quad \forall n$ ab einem gewissen n_0 .

• *nach oben bzw. nach unten beschränkt*, falls $\exists C \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq C$ bzw. $a_n \geq C$.

Trick: Eine sehr einfache Methode, um die Monotonie zu zeigen, ist folgende. Man ersetzt n durch die kontinuierliche Variable x und berechnet die Ableitung nach x . Gilt $a'(x) \geq 0$ respektive $a'(x) \leq 0$, so ist die Folge monoton wachsend respektive monoton fallend. (Nicht vergessen: $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 0$).

Thm. Konvergente Folgen sind immer beschränkt:

$$a_n \text{ konvergent} \implies a_n \text{ beschränkt.}$$

Achtung:

$$a_n \text{ beschränkt} \not\implies a_n \text{ konvergent.}$$

5.4.2 Monotone Konvergenz

Falls zusätzlich Monotonie angenommen wird gilt auch quasi die Umkehrung des vorangehenden Satzes.

Thm. (Monotone Konvergenz) Sei a_n nach oben (bzw. nach unten) beschränkt und monoton wachsend (bzw. fallend), dann ist a_n konvergent.

$$a_n \text{ na. o./u. besr.} \wedge a_n \text{ mon. wa./fa.} \implies a_n \text{ konv.}$$

Bem: Dieser Satz ist besonders nützlich um die Konvergenz einer rekursiv definierten Folge nachzuweisen.

Vorgehen:

- Berechne ein paar Terme von a_n um ein Gefühl zu bekommen
- Beweise mittels Induktion, dass die Folge monoton wachsend/fallend ist
- Beweise mittels Induktion, dass die Folge beschränkt ist, nimm dazu einen Grenzwert, oder eine obere Schranke.
- Gelingen die beiden vorherigen Schritte, kann man daraus anhand des Satzes über Monotone Konvergenz folgern, dass $a_n \rightarrow a$ konvergiert. Um a zu bestimmen ersetzt man einfach a_n bzw. a_{n-1} in der Rekursionsgleichung durch a und löst nach a auf.

Trick: Sollte man eine Folge a_n erhalten, die alternierend ist, dann kann man den Grenzwert a zuerst berechnen, und dann zeigen, dass die Absolutbeträge folgender Folge

$$b_n = a_n - a$$

monoton fallend sind, d.h. $|b_n|$ ist monoton fallend. Dann zeigt man, dass $|b_n|$ beschränkt ist. Somit

konvergiert auch b_n (ohne Betrag) und ferner auch a_n .

5.5 Teilfolgen

Def. Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen und a_n eine Folge. Die Folgenglieder a_n mit $n \in \Lambda$ bilden eine *Teilfolge* $\{a_n\}_{n \in \Lambda}$.

Achtung: Λ muss unendlich viele Elemente enthalten!

Achtung: Λ muss streng monoton wachsend sein.

5.5.1 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Thm. (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} besitzt eine konvergente Teilfolge.

a_n beschr. $\implies \exists \Lambda \subset \mathbb{N}$ s.d. $\{a_n\}_{n \in \Lambda}$ konv.

5.6 Limes superior und Limes inferior

Def. Sei a_n eine beschränkte und nicht notwendigerweise konvergente Folge. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$b_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

Explizit:

$$b_0 = \sup\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

$$b_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$b_2 = \sup\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

\vdots

Das heisst b_n ist eine Teilfolge von a_n . Wir fragen uns. Ist b_n konvergent? Die Folge b_n ist monoton fallend, d.h.

$$b_n \geq b_{n+1},$$

weil für die Bestimmung von b_{n+1} das Supremum über eine kleinere Anzahl von Folgengliedern von a_n genommen wird als für b_n . Die Folge b_n ist auch beschränkt, weil a_n beschränkt ist. Der Satz über monotone Konvergenz impliziert somit, dass b_n konvergiert. Der Limes von b_n wird *Limes superior* von a_n genannt. Notiert wird

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Analog kann man für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge

$$c_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

betrachten. Die so definierte Teilfolge c_n ist monoton wachsend, weil für die Bestimmung von c_{n+1} das Infimum über eine kleinere Anzahl von Folgengliedern von a_n bestimmt wird, als für c_n . Sie ist auch beschränkt, da a_n beschränkt ist, und folglich

konvergent. Der Limes von c_n heisst *Limes inferior* von a_n . Notiert wird

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Bem: Falls die Folge nach unten oder nach oben unbeschränkt ist, setzt man

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Bem: Falls die Folge selbst konvergent ist, stimmen $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ überein und sind gleich $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Thm. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Bem: In anderen Worten: Für konvergente Folgen ist die Betrachtung mit \limsup und \liminf unnötig, da es keinen Unterschied zwischen \limsup , \liminf und dem üblichen Limes gibt. Dieser Unterschied wird relevant, sobald a_n selbst nicht konvergiert, wie dies zum Beispiel bei stückweise definierten Folgen der Fall ist.

Bsp:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = +\infty \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} n \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

Bsp:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|5^n + (-5)^n|} &\stackrel{\text{gerade}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} 5 \sqrt[n]{2} = 5. \end{aligned}$$

5.7 Cauchy Folgen

Def. Eine Folge a_n heisst *Cauchy Folge* falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| \leq \epsilon.$$

Anschaulich gesprochen ist eine Folge genau dann eine Cauchy-Folge, wenn ihre Folgenglieder für wachsende Indizes immer enger zusammenrücken.

Thm. (Cauchy-Kriterium) Sei a_n eine reelle (oder komplexe) Folge. Dann gilt:

a_n konvergiert $\iff a_n$ ist eine Cauchy-Folge.

Bem: Konvergente Folgen sind immer Cauchy-Folgen. Denn bei einer konvergenten Folge kommen die Folgenglieder a_n nicht nur dem Grenzwert a beliebig nahe, sondern die Folgenglieder kommen sich auch untereinander ab einem gewissen Index beliebig nahe.

Umgekehrt, sind auch reelle (oder komplexe) Cauchy Folgen konvergent. Es gibt aber Situationen

(z.B. bei rationalen Folgen) wo dies nicht der Fall ist.

Wenn man zum Beispiel, eine Folge in \mathbb{Q} betrachtet, die in \mathbb{R} nach $\sqrt{2}$ konvergieren würde, in \mathbb{Q} ist sie sehrwohl Cauchy-konvergent, aber sie ist in \mathbb{Q} nicht konvergent, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und der Grenzwert somit nicht existiert.

Konvergente Folgen \subseteq Cauchy Folgen

Beweis: Au der Definition von der Konvergenz existiert also der GW $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, somit gilt für alle $n, m \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a + a - a_n| \\ &\leq \underbrace{|a_m - a|}_{< \epsilon} + \underbrace{|a - a_n|}_{< \epsilon} < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Somit ist jede konvergente Folge a_n eine Cauchy Folge.

Def. Metrische Räume, welche die Eigenschaft haben, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, werden (*metrisch*) *vollständige Räume* genannt.

Bsp: \mathbb{N} , \mathbb{R} und \mathbb{C} sind vollständige Räume. \mathbb{Q} hingegen nicht.

Bem: In \mathbb{N} sind die Cauchy Folgen, falls $\epsilon < 1$ gewählt wird einfach ab $N(\epsilon)$ konstant. Somit ist \mathbb{N} auch ein vollständiger Raum.

Beweise von Konvergenz/Divergenz anhand des Cauchy Kriteriums

Cauchy-Folgen liefern im Prinzip ein handliches Kriterium für die Konvergenz einer Folge in \mathbb{R} , denn es genügt zu zeigen, dass eine vorgelegte Folge eine oder keine Cauchy-Folge ist, um Konvergenz oder Divergenz nachzuweisen, ohne den Grenzwert bereits zu kennen zu müssen. Dieses Kriterium ist jedoch nur selten geeignet, da wir den Grenzwert der zu untersuchenden Folge durch dieses Verfahren nicht ermitteln können.

Trick: Bei beweisen über die Definition von Cauchy-Konvergenz ist es immer eine gute Idee, o.B.d.A. $m \geq n$ (oder $n \geq m$) zu fixieren.

Vorgehen: ϵ fixieren, o.B.d.A. sei $m \geq n$, Terme zusammennehmen, nach oben abschätzen, m rauskürzen, Formel für n in Abhängigkeit von ϵ ermitteln.

6. Grenzwerte von Funktionen

Bisher haben wir nur Grenzwerte von Folgen a_n für $n \rightarrow \infty$ betrachtet. Jetzt wollen wir auch beliebige Funktionsausdrücke $f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ betrachten und deren Verhalten für $x \rightarrow a$ untersuchen.

6.1 Der Grenzwert einer Funktion

Def. Sei f eine Funktion, welche auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist, das den Punkt a enthält. Man sagt f besitzt an der Stelle a den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$, geschrieben

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, |x - a| < \delta : |f(x) - L| < \epsilon.$$

Bem: In Worten: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ bedeutet, dass für jede beliebig klein gewählte Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, welche i. Allg. von ϵ abhängt, sodass für alle x in $(a - \delta, a + \delta)$ gilt $f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Es ist of nützlich, links- und rechtsseitige Grenzwerte zu definieren.

Def. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat an der Stelle $a \in I$ den *linksseitigen Grenzwert* $L \in \mathbb{R}$, geschrieben

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ s.d. } \forall x \in (a - \delta, a) : |f(x) - L| < \epsilon.$$

Analog hat f an der Stelle a den *rechtsseitigen Grenzwert* $L \in \mathbb{R}$, geschrieben

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ s.d. } \forall x \in (a, a + \delta) : |f(x) - L| < \epsilon.$$

Thm. Sei $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in I$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) f besitzt in a den Grenzwert L ;
- ii) f besitzt an der Stelle a einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert und für diese gilt

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

Auch in den Fällen, wo der Grenzwert an der Stelle a unendlich ist, kann man analoge Definitionen aufstellen.

Def. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ bedeutet, dass

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0, \text{ s.d. } \forall x, |x - a| < \delta \text{ gilt } f(x) > M.$$

D.h. egal wie gross wir M wählen, wir finden immer noch ein δ , so dass für alle x in dieser Umgebung $f(x)$ grösser als M ist.

Def. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ bedeutet, dass

$$\forall M < 0 \exists \delta > 0, \text{ s.d. } \forall x, |x - a| < \delta \text{ gilt } f(x) < M.$$

Analog: Egal wie gross wir eine negative Zahl M

wählen...

Def. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ bedeutet, dass
 $\forall M > 0 \exists \delta > 0$, s.d. $\forall x, |x - a| < \delta: |f(x)| > M$.

Bsp: $a_n := \frac{1}{x}$ konvergiert von rechts gegen $+\infty$ und von links gegen $-\infty$. Es ist also einfach eine Zusammensetzung der oberen beiden Definitionen.

Def. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ bedeutet, dass
 $\forall M > 0 \exists N > 0$, s.d. $\forall x, |x| > N$ gilt $|f(x)| > M$.
 D.h. egal wie gross wir M wählen, wir finden immer ein N , so dass alle $x, |x| \geq N$ der Funktionswert $f(x)$ im Betrag grösser ist als M .

Vorgehen: (Ber. v. GW mittels ϵ - δ -Def.)

Z.Z.: $f(x) \rightarrow a$ für $x \rightarrow x_0$. **Beweis:** Fixiere $\epsilon > 0$ als beliebig klein, dann zeige, dass es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in (x - \delta, x + \delta)$ gilt: $|f(x) - a| < \epsilon$. Dazu schreibt man die Gleichung $|f(x) - a| < \epsilon$ auf, oft läuft es aufs Aufklappen des Betrags hinaus. Bringe dann x in die Mitte der Ungleichungen, links und rechts sollte ein Term in Abhängigkeit von ϵ stehen. Die beiden Terme bilden die δ -Umgebung von x für ein ϵ , diese kann man Gleichsetzen mit $(a - \delta_1, a + \delta_2)$, dadurch bestimmt man dann δ_1 und δ_2 . Schlussendlich ergibt sich, dass für $\delta := \min \delta_1, \delta_2$ die obige Ungleichung erfüllt ist.

7. Rechnen mit Grenzwerten

In diesem Kapitel studieren wir nützliche Techniken, um Grenzwerte von Funktionen effizient berechnen zu können.

7.1 Prinzip

Thm. Falls die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existieren, so werden die Grenzwerte mittels der folgenden Rechenregeln ermittelt

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, falls $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

7.2 (Un)-entscheidbare Situationen

Die Rechenregeln, die wir im vorigen Abschnitt kennengelernt haben, gelten nur, falls die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ beide existieren. In speziellen Situationen darf man sie trotzdem verwenden, auch wenn einer oder beide Grenzwerte nicht existieren. Man notiert oft

Entscheidbare Fälle

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0, \quad \infty + \infty = \infty, \\ 0 + \infty = \infty, \quad 0^\infty = 0, \quad \infty^\infty = \infty.$$

Die folgenden Fälle nennen wir *unentscheidbar*. Hier ist das Resultat als nicht a-priori entscheidbar.

Unentscheidbare Fälle

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 0 \cdot \infty.$$

Diese Fälle brauchen eine spezielle Betrachtung. Die verschiedenen Tricks, welche wir in den folgenden Abschnitten kennenlernen werden, dienen dazu, diese problematischen Fälle zu untersuchen.

7.3 Das Sandwich Theorem

Thm. Aus $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für x in der Nähe von a und

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

folgt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Bsp: Zu bestimmen sei $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} e^{\sin(\frac{x}{x})}$. Wir schätzen dazu nach unten und oben ab
 $0 \leftarrow \sqrt{x} e^{-1} \leq \sqrt{x} e^{\sin(\frac{x}{x})} \leq \sqrt{x} e^1 \rightarrow 0$ (für $x \rightarrow 0$)
 Es folgt, dass der Grenzwert 0 ist.

7.4 Dominanzen

Def. Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, mit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

für $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wir sagen, dass "f die Fkt. g dominiert", falls

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

ist. Geschrieben wird $g \prec f$. Falls

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0,$$

so sind f und g sozusagen von der gleichen Ordnung, weil keine der beiden die andere dominiert für $x \rightarrow a$.

Im Allgemeinen gelten die folgenden Dominanzen Für $x \rightarrow +\infty$:

$$\dots \prec \log(\log(x)) \prec \log(x) \prec x^\alpha \prec e^x, \quad \alpha^x \prec x! \prec x^x$$

Wobei für x^α man folgendermassen sortiert:

$$\dots \prec x^{1/4} \prec x^{1/2} \prec x^1 \prec x^2 \prec x^3 \prec \dots$$

Für $x \rightarrow 0$:

$$\dots \prec \log(\log(x)) \prec \log(x) \prec \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha \prec \frac{1}{\alpha^x} \prec \frac{1}{x!} \prec \frac{1}{x^x}$$

Bem: Konstante, fallende und trigonometrische Funktionen müssen speziell betrachtet werden.

Bem: auch Grenzwerte zu anderen Werten als 0 und ∞ müssen speziell betrachtet werden.

Bsp: In den folgenden Beispielen sind die Dominanten Terme markiert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{23}{x} - \log(x)^{234} + \frac{1}{x^2}}{\frac{3}{\sqrt{x}x^{3/2}} - 345 \log(x)^{3445} - x^3} \rightarrow \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{\sqrt{x}x^{3/2}}} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 1}{8x^3 + 3x^2 - 5} \rightarrow \frac{4x^2}{8x^3} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5x} + 7x^2}{x^5 + x \arctan x} \rightarrow \frac{e^{5x}}{x^5} \rightarrow +\infty$$

7.5 Der Wurzeltrick

Das ist eine sehr nützliche Methode, gewisse Grenzwerte zu bestimmen, welche Wurzeln enthalten. Oft multipliziert man damit mit einem konjugierten Term, so dass man die zweite Binomische Formel anwendet. Bei drei Wurzeln kann man zum Teil auch die dritte binomische Formel anwenden. Am besten erklärt sich die Methode mit ein paar Beispielen:

Vorgehen: Oft multipliziert man mit 1, und verwendet dabei eine Binomische Formel, das die Wurzeln dann quadriert und somit das Problem evtl. schon beseitigt.

Bsp: Höhere Bin. Formeln: $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
 Hier hat es 3 Wurzelterme und deshalb reicht die 3. Bin Formel nicht, es muss eine höhere Binomische Formel genommen werden.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}) \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3}{x} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3}{x} \cdot 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \frac{(x+1) - (x-1)}{(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2})} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \frac{2}{(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2})} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \frac{2}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{1/2}}{3x^{2/3}} = 0$$

7.6 Fund.lim. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Dieser Limes wird oft bei Problemen vom Typ 1^∞ verwendet. Es ist wichtig sich zu merken, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Diese fundamentalen Grenzwerte ergeben die folgenden sehr nützlichen Regeln

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{1}{\odot}\right)^{\odot} = e$$

wobei \odot ein beliebiger Ausdruck in x ist, mit $\odot \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow a$. Äquivalent dazu

$$\lim_{x \rightarrow a} (1 + \odot)^{\frac{1}{\odot}} = e$$

wobei \odot ein beliebiger Ausdruck in x ist, mit $\odot \rightarrow 0$ für $x \rightarrow a$.

Zwei weitere nützliche Formeln, falls x nur in einfacher Form vorkommt, sind:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx}\right)^{cx} = e^{\frac{ac}{b}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{c}{bx}} = e^{\frac{ac}{b}}.$$

Vorgehen: Man versucht die gegebenen Grenzwerte in eine der oben genannten Formen zu bringen. Man Addiert dazu zuerst 0 (Falls der \odot gegen 0 gehen soll), und schreibt den Zähler hinunter in den Nenner als Nenner des Nenners (Falls der \odot gegen ∞ gehen soll), so dass mindestens der Nenner im Bruch steht, dann entfernt man die 1 und erhält dann den übrig bleibenden Term. Im Exponenten multipliziert man dann mit 1, bzw. dem Term und dessen Kehrwert. Danach wendet man die Regel des Fundamentallimes an und zieht den Limes ins Argument hinein und bestimmt den schlussendlichen Grenzwert.

Bsp:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x}}\right)^{2x}$$

$$= e^{-6}.$$

7.7 Fundamentallimes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Man kann zeigen, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \left(\text{somit auch } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1 \right)$$

Dieser fundamentale Grenzwert ergibt die folgende nützliche Regel

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(\odot)}{\odot} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow a} \odot \sin\left(\frac{1}{\odot}\right)$$

wobei \odot ein beliebiger Ausdruck in x ist, für den $\odot \rightarrow 0$ für $x \rightarrow a$ gilt und \otimes ein beliebiger Ausdruck in x ist, für den $\otimes \rightarrow 0$ für $x \rightarrow a$ gilt.

Vorgehen: Die Strategie ist, den Limes in der Form $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\odot)}{\odot}$ zu schreiben, mit $\odot \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$. Oft multipliziert man dabei mit 1, benutzt dann den Fundamentallimes und betrachtet dann die übrig bleibenden Terme.

Bsp:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \cdot \frac{3x}{3x} \cdot \frac{4x}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(3x)}{3x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{4x}{\sin(4x)}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

7.8 Der Satz von Bernoulli-de l'Hôpital

Thm. (Bernoulli-de l'Hôpital) Es seien f und g zwei in einer Umgebung des Punktes a (auch $a = \infty$) definierte und differenzierbare Funktionen, mit $g' \neq 0$. Falls entweder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

7.8.1 Der Satz von Bernoulli-de l'Hôpital für " $\frac{0}{0}$ " und " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Sollte sich so eine Situation ergeben, muss man einfach den Zähler und Nenner separat ableiten. Eventuell muss man die Regel mehrmals anwenden. Je nach dem können verschiedene Probleme auftreten, wofür es Lösungen gibt

- Man erhält ursprünglichen Grenzwert zurück: andere Methoden anwenden.

- Bruch wird immer komplizierter: Evtl. hilft das Umkehren des Bruches.

7.8.2 Der Satz von Bernoulli-de l'Hôpital für die Fälle " $0 \cdot \infty$ ", " $\infty - \infty$ "

Einige einfache Umformungen erlauben es Grenzwerte vom Typ " $0 \cdot \infty$ " oder " $\infty - \infty$ " in die Form " $\frac{0}{0}$ " oder " $\frac{\infty}{\infty}$ " umzuschreiben, um sie mit der Regel von BdH. zu lösen.

Den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$$

mit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ kann man zum Beispiel wie folgt umformen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{1/g(x)} \implies \text{Typ } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{1/f(x)} \implies \text{Typ } \frac{\infty}{\infty}$$

Grenzwerte vom Typ $\infty - \infty$ werden oft durch Umformen (Brüche auf gemeinsamen Nenner bringen, Trigonometrische Identitäten anwenden, ...) in eine BdH-kompatible Form gebracht.

7.9 Der $e^{\ln(x)}$ -Trick

Grenzwerte vom Typ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)},$$

wobei eine der folgenden Situationen auftritt: 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . Können folgendermassen umgeschrieben werden

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))}$$

und dann kann der Grenzwert für die Funktion im Exponenten mit Hilfe des Satzes von BdH. gelöst werden. Da die Funktion e^{\square} stetig ist, kann der Limes jeweils hineingezogen werden.

Achtung: Nicht vergessen, den berechneten Grenzwert wieder bei e^{\square} einzusetzen, falls er separat behandelt wurde.

7.10 Taylor, der Retter

Durch eine Approximation durch Taylor-Reihen und durch betrachten der Dominanten Terme lassen sich Grenzwerte oft leicht bestimmen. Oft, sind folgende Taylor-Entwicklungen um $x = 0$ nützlich:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\sin(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots$$

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\cos(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots$$

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\tan(\varphi) = \dots \text{kompliziert} \dots = 1 + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{2\varphi^5}{15} + \dots$$

$$\tanh(z) = \dots \text{kompliziert} \dots = 1 - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - \dots$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots$$

8. Reihen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine gegebene reelle oder komplexe Folge. Anfangend von dieser Folge kann man eine neue Folge $(S_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$ durch Summation der ersten N Glieder von a_n definieren

$$S_N = a_0 + a_1 + \dots + a_N = \sum_{n=0}^N a_n.$$

S_N heisst *Partialsomme* von a_n . Ist die Folge S_N der Partialsummen von a_n konvergent, so heisst deren Limes $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ (*unendliche*) *Reihe* der Folge a_n . Notiert wird

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Ist die Partialsomme divergent, so heisst die Reihe divergent. *Reihenrest* heisst der Wert

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

Die Aussage $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$ ist gleichbedeutend mit $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0$. In anderen Worten: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = 0$$

gilt. Das ist als *Cauchy Kriterium* bekannt. Der Term a_n heisst das *allgemeine Glied* der Reihe.

Thm. (Summenregel für Reihen) Sind $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei konvergente Reihen, so sind auch $\sum_n (a_n + b_n)$ und $\sum_n (a_n - b_n)$ konvergent und es

gilt

$$\sum_n (a_n \pm b_n) = \sum_n a_n \pm \sum_n b_n.$$

Bem: Diese Regel folgt direkt aus den Regeln für Grenzwerten. Sie eignet sich fürs Aufteilen von Reihen, sofern die aufgeteilten Teile konvergent sind.

Bsp: $\sum_n (1-1)$ dürfte z.B. nicht aufgeteilt werden.

8.1 Konvergenzkriterien

Konvergenzkriterien sind Mittel zur Entscheidung darüber, ob bzw. unter welchen Bedingungen eine vorgelegte Reihe konvergiert oder divergiert, ohne ihre Summe explizit berechnen zu müssen.

Konvergenzkrit. 1: Mittels der Definition

Die Definition der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n$$

kann man als Konvergenzkriterium benutzen. Man geht wie folgt vor: Man findet, in Abhängigkeit von N , eine allgemeine Formel für die Partialsomme S_N und bildet den Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$. Existiert $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$, so ist die Reihe konvergent. Existiert $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ nicht, so ist die Reihe nicht konvergent. Diese Methode ist besonders geeignet, wenn man den Wert von einer Reihe explizit berechnen will.

Vorgehen:

1. Eventuell a_n umformen (siehe Tricks unten).
2. Partialsommen $S_1 =$, $S_2 =$, $S_3 =$, ... untereinander aufschreiben.
3. Explizite Formel für $S_N =$ bilden indem man anhand der berechneten Partialsommen versucht das Muster zu erkennen (z.B. alle Terme bis auf ersten und letzten kürzen sich weg., wie bei Mengol-Reihe)

Umform-Tricks:

- Eventuell PBZ von a_n bestimmen (z.B. mit 0 addieren), Beispiele:

$$a_n := \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$a_n := \frac{1}{(n+x)(x+n-1)} = \frac{1+n-n+x-x}{(n+x)(x+n-1)} = \dots$$

Dadurch kann man in den nächsten Schritten die allgemeine Formel eventuell besser erkennen.

- Falls Logarithmen enthalten sind Exponenten herausnehmen, oder Multiplikation

nen/Divisionen in Summen/Subtraktionen zerlegen.

- Falls Wurzeln enthalten sind mit dem Konjugierten bzw. 1 multiplizieren.

Konvergenzkrit. 2: "lim_{n→∞} a_n = 0"

Die Konvergenz einer Reihe ist mit einem notwendigen Grenzwertkriterium für a_n verbunden

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Wenn die Reihe $\sum_n a_n$ konvergiert, so müssen ihre Glieder eine Nullfolge bilden (d.h. eine Folge mit Limes Null). Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ungleich Null, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht. Die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ist notwendig (d.h. damit die Reihe konvergiert, muss sie erfüllt sein), aber nicht hinreichend (d.h. es existieren divergente Reihen, deren Glieder eine Nullfolge bilden, wie zum Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$). Mit diesem Kriterium können wir also nur die Divergenz, aber im Allgemeinen nicht die Konvergenz einer Reihe nachweisen.

Konvergenzkrit. 3: Majoranten und Minorantenkriterium

Thm. (Majorantenkrit.) Es seien $a_n, b_n > 0$ mit

$$a_n \geq b_n \quad \forall n \text{ ab einem gewissen } n_0.$$

Dann gilt

$$\sum_n a_n \text{ konvergiert} \implies \sum_n b_n \text{ konvergiert.}$$

Thm. (Minorantenkrit.) Es seien $a_n, b_n > 0$ mit

$$a_n \geq b_n \quad \forall n \text{ ab einem gewissen } n_0.$$

Dann gilt

$$\sum_n b_n \text{ divergiert} \implies \sum_n a_n \text{ divergiert.}$$

Beim *Majorantenkriterium* schätzt man die Folge b_n nach oben durch a_n ab. Ist die Reihe $\sum_n a_n$ konvergent, so ist es auch $\sum_n b_n$ (gesprochen: $\sum_n a_n$ ist eine *Majorante* von $\sum_n b_n$).

Beim *Minorantenkriterium* wird die Folge a_n nach unten durch b_n abgeschätzt. Ist die Reihe $\sum_n b_n$ divergent, so ist es auch $\sum_n a_n$ (gesprochen: $\sum_n b_n$ ist eine *Minorante* von $\sum_n a_n$).

Bem: Die Ungleichung $a_n \geq b_n$ braucht nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ zu gelten, sondern sie ist im Allg. nur ab einem gewissen n_0 gültig (z.B. $n_0 = 3$). In einer solchen Situation, wo also die gewünschte Abschätzung am Anfang nicht gültig ist, kann man die Reihe in

zwei Teile aufspalten.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

Das heist für die Konvergenz einer Reihe spielt das Verhalten am Anfang (der endlich vielen Glieder bis n_0) keine Rolle.

Beide Kriterien stützen sich auf den Vergleich mit Reihen, deren Konvergenzverhalten bekannt ist. Insbesondere ist es wichtig sich zu merken, dass

Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ konvergiert} \iff |q| < 1$$

Riemannsche ζ -Funktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert} \iff s > 1$$

Harmonische Reihe (Spezialfall von $\zeta(s)$, $s = 1$)

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

Konvergenzkrit. 4: Das Vergleichskriterium

Das *Vergleichskriterium* hat breite Anwendungen, weil es erlaubt, über das Konvergenzverhalten einer komplizierten Reihe schnell zu entscheiden.

Seien $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ zwei gegebene Reihen mit $a_n, b_n > 0$. Wir unterscheiden drei verschiedene Fälle:

1. Wenn der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existiert und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in (0, \infty)$$

gilt, dann haben die Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ dasselbe Konvergenzverhalten. In anderen Worten: Ist $\sum_n b_n$ divergent, so ist es auch $\sum_n a_n$. Ist $\sum_n b_n$ konvergent, so ist es auch $\sum_n a_n$.

2. Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

so ist $\sum_n b_n$ sozusagen grösser als $\sum_n a_n$. Es gilt also

- $\sum_n a_n$ divergent $\implies \sum_n b_n$ divergent;
- $\sum_n b_n$ konv. $\implies \sum_n a_n$ konv.

3. Falls,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty,$$

so ist $\sum_n b_n$ sozusagen kleiner als $\sum_n a_n$. Es gilt also

- $\sum_n a_n$ konv. $\implies \sum_n b_n$ konv.;
- $\sum_n b_n$ divergent $\implies \sum_n a_n$ divergent.

Konvergenzkrit. 5: Das Quotientenkriterium.

Thm. (Quotientenkriterium) Es sei $\sum_n a_n$ mit $a_n \neq 0$ gegeben. Dann gilt

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \implies \sum_n a_n$ divergiert,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \implies \sum_n a_n$ konvergiert,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \implies$ Kriterium versagt.

Bem: Das Quotientenkriterium ist extrem einfach anzuwenden und eignet sich besonders wenn in a_n Faktoren wie $n!$, a^n oder Polynome vorkommen. Beachte, dass das Quotientenkriterium eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz von Reihen ist, allerdings keine notwendige. Es gibt also Reihen, die keinen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ haben und dennoch konvergieren. (Es ist nur eine Implikation, keine Äquivalenz).

Konvergenzkrit. 6: Das Wurzelkriterium

Thm. (Wurzelkriterium) Betrachte die Reihe $\sum_n a_n$. Es gilt

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_n a_n$ divergiert,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \implies$ Kriterium versagt,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_n a_n$ konvergiert.

Bem: Das Wurzelkriterium eignet sich besonders, wenn das allgemeine Glied a_n von der Form $a_n = (b_n)^n$ ist.

Quotientenkriterium vs. Wurzelkriterium

Thm. (Cauchy d'Alembert) Existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Bem: Der Satz besagt also, dass wenn das Quotientenkriterium versagt, so tut es auch das Wurzelkriterium.

Konvergenzkrit. 7: Das Integralkriterium

Thm. (Integralkriterium) Stellen wir die Glieder der Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ als Funktionswerte $a_n =$

$f(n)$ einer im Intervall $[p, \infty)$ stetigen Funktion $f(x)$ dar, so gilt das Integralkriterium Die Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ erüfille

- (1) $a_n \geq 0$
- (2) a_n mon. fallend (d.h. $a_n \geq a_{n+1}$)

Dann gilt

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \int_p^{\infty} a(x) dx \text{ konvergiert.}$$

Bem: Für monoton fallende, positive Folgen a_n haben also $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ und $\int_p^{\infty} a(x) dx$ dasselbe Konvergenzverhalten. Das bedeutet aber nicht, dass $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ und $\int_p^{\infty} a(x) dx$ denselben Wert haben.

Thm. Im Allgemeinen gelten die folgenden Abschätzungen

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \leq \int_p^{\infty} a(x) dx \leq \sum_{n=p}^{\infty} a_n$$

TODO herausfinden, ob das nur für eine Folge mit den obigen Eigenschaften gilt

Konvergenzkrit. 8: Leibnitz-Kriterium

Thm. (Leibnitz Kriterium) Es sei die alternierende Reihe $\sum_n (-1)^n a_n$ gegeben. Falls die Folgenden Bedingungen erfüllt sind,

- (1) $a_n \geq 0$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- (3) a_n monoton fallend

konvergiert die Reihe $\sum_n (-1)^n a_n$.

Konvergenzkrit. 9: Absolute Konvergenz

Def. Eine Reihe $\sum_n a_n$ heisst *absolut konvergent*, falls $\sum_n |a_n|$ konvergiert.

Thm. (Absolute Konvergenz) Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert} \implies \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

Konvergenzkrit.: Stirling'sche Formel

Oft ist es auch nützlich $n!$ durch die Stirling'sche Formel anzunähern

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{e}{n}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty$$

Die Formel Rechts hat also dasselbe asymptotische Verhalten wie $n!$.

Konvergenzkrit.: Alternating Series Test

A series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

Or,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

where a_n are positive, is called an alternating series. The alternating series test then says: if

- a_n decreases monotonically,
- and $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

then the alternating series converges.

8.X Reihen konkret ausrechnen

Geometrische Reihe

$$S_n = a_0 \sum_{k=0}^n q^k = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = a_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$S = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{a_0}{1 - q} \quad \text{falls } |q| < 1$$

Wichtig: Auf die Indizes achten! Sie beginnt bei $k = 0$ somit ist das erste Glied 1. Falls bei $k = 1$ begonnen wird muss man -1 addieren!

Arithmetische Reihe

$$S_n = \sum_{k=0}^n (k \cdot d + a_0) = (a_0 + a_n) \cdot \frac{(n+1)}{2}$$

wobei

$$a_i = i \cdot d + a_0 \quad \forall i \geq 1$$

und wobei d die Differenz zwischen zwei Folgegliedern ist.

$$a_i = i \underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{=d} + a_0$$

Ein Spezialfall der arithmetischen Reihe ist

$$\sum_{k=0}^n k = n \cdot \frac{(n+1)}{2}$$

Alternierende Harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

Trick: Oft lassen sich die Werte von unendlichen Reihen mithilfe der obigen Formeln bestimmen. Ein weiterer Trick ist verschiedene Repräsentationen von derselben Reihe S zu finden, und dann die

folgende Identität anzuwenden

$$S = 2S - S$$

Trick: Oft kann man durch verschieben der Indizes und herausnehmen von Reihengliedern die Terme so umformen, dass die Reihe einfacher zu berechnen wird.

9. Potenzreihen

Def. Eine Potenzreihe kann man als eine Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

auffassen. Sie hat somit einen Definitionsbereich. Dies ist der *Konvergenzbereich*, also die Menge von allen x in \mathbb{R} oder \mathbb{C} , für welche der Ausdruck $f(x)$ konvergiert

$$B_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert} \right\}$$

Ein wichtiges Resultat über Potenzreihen ist, dass der Konvergenzradius B_f kreisförmig ist, in dem Sinne, dass ein $\rho \in [0, \infty]$ existiert (der sogenannte *Konvergenzradius*), sodass

$$\begin{cases} |x - x_0| < \rho & \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergiert} \\ |x - x_0| > \rho & \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ divergiert} \end{cases}$$

Für den Fall $|x| = \rho$ (d.h. am Rand des Konvergenzkreises) ist keine Aussage über Konvergenz a priori möglich: Man muss den Einzelfall betrachten..

Thm. (Konvergenzradius) Für den Konvergenzradius ρ der Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gelten die folgenden Formeln

$$\begin{aligned} & \text{Eher geeignet falls } a_n = \dots \\ \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad n!, \alpha^n \text{ oder Polynom} \\ \rho &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (b_n)^n \end{aligned}$$

Beide Formeln folgen unmittelbar aus dem Quotienten- bzw. Wurzelkriterium.

Bsp: Die geometrische Reihe ist eine Potenzreihe, die für alle $|x| < 1$ konvergiert

9.2 Differenziation und Integration von Potenzreihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius ρ . Dann ist die durch $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definierte Funktion auf $\{x \mid |x| < \rho\}$,

also im Inneren des Konvergenzkreises, differenzierbar und die Ableitung, sowie das Integral dürfen Glied für Glied berechnet werden

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

Teil III

Differenzialrech. in \mathbb{R}

10. Stetigkeit

10.1 Stetige Funktionen

Def. Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge von \mathbb{R} . Die Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $a \in \Omega$ *stetig*, falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

d.h. dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert und dem Wert von f an der Stelle a gleicht. Man nennt f *auf Ω stetig*, falls f in jedem Punkt $a \in \Omega$ stetig ist.

10.2 Rechenregeln für stetige Funktionen

Thm. (Rechenregeln für stetige Funktionen) Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann sind

$$f + g, \quad f - g, \quad fg, \quad \frac{f}{g} \quad \text{falls } g \neq 0$$

stetig. Ausserdem sind $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: f(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist es auch $g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Das heisst die verschiedenen Kombinationen von Funktionen sind wieder stetig. Wichtig ist es sich zu merken, dass folgende Funktionen stetig sind: konstante Funktionen, Identität, Potenzen von x , Polynome mit reellen Koeffizienten, rationale Funktionen (sofern keine Nullstellen im Nenner liegen) Exponentialfunktion, Sinus, Cosinus, Tangens, hyperbolische Funktionen, Logarithmus.

Wichtig: Stetig sind auch all deren Kompositionen, solange diese definiert sind.

Vorgehen: (Stetigkeit überprüfen) Um eine vorgelegte Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit an der Stelle a zu überprüfen, muss man also folgende drei Punkte nachweisen:

- (1) f muss auf Ω definiert sein;
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert, d.h., $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \infty$ und $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

10.2.1 Der Raum $C^0(\Omega, \mathbb{R})$

Def. Aus den Rechenregeln folgt insbesondere, dass die stetigen Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ einen Vektorraum über den reellen Zahlen bilden, den Raum $C^0(\Omega)$:

$$C^0(\Omega, \mathbb{R}) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}.$$

Bem: Manchmal wird einfach $C(\Omega)$ statt $C^0(\Omega)$ notiert.

TODO Warum über den reellen Zahlen und nicht über die Funktionen?

10.3 Äquivalente Kriterien

Thm. Für $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind die folgenden Kriterien für Stetigkeit äquivalent

- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist an der Stelle $a \in \Omega$ stetig.
- (Folgekriterium) Für jede Folge x_n in Ω mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.
- (Weierstrass Kriterium) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$, sodass für alle $|x - a| < \delta$ folgendes gilt

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Beweis von Stetigkeit anhand des Weierstrass-Kriteriums

Vorgehen: Z.Z.: f ist stetig in $x_0 \in \Omega$. **Beweis:** Dazu müssen wir zeigen, dass f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ stetig ist. Sei also $x_0 \in \mathbb{R}$, dann muss gelten

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Wir formen diesen Ausdruck um, mittels Betrag aufklappen und bringen nur x in die Mitte, daraus ergibt sich dann eine δ -Umgebung in Abhängigkeit von x_0 . Sind die Intervalle der Umgebung asymmetrisch, setzen wir $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Daraus ergibt sich also das $\delta(\epsilon, x_0)$.

Beweis von Stetigkeit anhand des Folgekriteriums

Vorgehen: Z.Z.: f ist stetig in $x_0 \in \Omega$ **Beweis:** Wir wählen eine beliebige Folge $x_n \in \mathbb{R}$ mit dem Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ aus und zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ gilt. Sei $x_n \in \mathbb{R}$ eine solche Folge. Mithilfe der Rechenregeln für Grenzwerte zeigt man dann jeweils

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \dots = f(x_0).$$

Somit ist $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig.

10.4 Gleichmässige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

10.4.1 Gleichmässige Stetigkeit

Def. $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *gleichmässig stetig* auf Ω , falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ existiert, sodass für alle $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| < \delta$. Folgendes gilt

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Wichtig: $\delta = \delta(\epsilon)$ bedeutet, dass δ nur von ϵ abhängt. Dies darf nicht mit der Definition der üblichen Stetigkeit (Weierstrass-Kriterium) verwechselt werden, wo δ i.Allg. auch von x, y abhängt.

Def. Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}$ heisst *kompakt*, falls sie *abgeschlossen* und *beschränkt* ist.

Bem: z.B. $[3, 4]$ ist abgeschlossen, $(3, 4)$ nicht.

Stetige Funktionen auf kompakten Mengen Ω besitzen eine wichtige Eigenschaft:

Thm. Es seien $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und Ω kompakt. Dann ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig.

Bem: Der Satz bietet ein handliches Kriterium, um gleichmässige Stetigkeit nachzuweisen. Die Merkregel ist: Stetigkeit auf Kompaktum = gleichmässige Stetigkeit.

10.4.2 Lipschitz Stetigkeit

Def. $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

L heisst *Lipschitz-Konstante* für f .

Thm. Eine differenzierbare Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitzstetig, wenn ihre erste Ableitung auf Ω beschränkt ist.

10.4.5 Zusammenhang der Begriffe

$$((f \text{ diff.} \wedge f' \text{ beschr.}) \iff f \text{ Lip.st.})$$

\implies

$$f \text{ gm.s.} \iff f \text{ stg.}$$

$\Omega \text{ kompakt}$

Jede Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante L ist gleichmässig stetig. Bei der gleichmässigen Stetigkeit ist δ dann einfach $\delta := \epsilon/L$.

Bsp: $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist gm. stg. aber nicht L.s.

Bsp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist Lip.stg. aber nicht diff'bar.

10.4.6 Beispiele

Beweise von gleichmässiger Stetigkeit

Vorgehen: Die Schwierigkeit bei den Aufgaben, wo nach der gleichmässigen Stetigkeit gefragt wird, ist es, ein δ zu finden, das unabhängig von x, y ist. Wie kann man in solchen Situationen vorgehen? Man versucht den Term $|f(x) - f(y)|$ durch einen Ausdruck der Form $C|x - y|$ nach oben abzuschätzen.

Vorgehen: Oft beweist man die gleichmässige Stetigkeit auch über die Beschränktheit der Ableitung, was impliziert, dass f sogar Lipschitz stetig ist, woraus folgt, dass f gleichmässig stetig ist.

Vorgehen: Oft beweist man die gleichmässige Stetigkeit auch über die Stetigkeit von f (z.B.: Komposition von stetigen Funktionen, die definiert sind) und der Kompaktheit des Definitionsbereiches.

Beweise von Lipschitz-Stetigkeit

Vorgehen: Man versucht $|f(x) - f(y)|$ zu faktorisieren in $|\dots||x - y|$. Danach schätzt man $|\dots|$ falls nötig nach oben ab (z.B. mit der Dreiecksungleichung) um die Lipschitz-Konstante zu ermitteln. Beim Abschätzen mit der Dreiecksungleichung setzt man dann Werte aus dem Definitionsbereich ein, für die die $|\dots|$ mit x und y maximal wird.

Vorgehen: Eine andere Variante um Lipschitz-Stetigkeit zu zeigen, ist zu zeigen, dass die erste Ableitung von f beschränkt ist. Daraus folgt dann die Lipschitz-Stetigkeit.

Vorgehen: Mit einem Widerspruchsbeweis zeigt man, dass f nicht Lipschitz-stetig ist, indem man annimmt, dass eine Lipschitz-konstante L existiert, und dann aber ein Widerspruch in einer Ungleichung mit L entsteht.

10.5 Der Zwischenwertsatz

Thm. (Zwischenwertsatz) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Vorgehen: Der ZWS wird oft für (nicht konstruktive) Existenzbeweise benutzt. Der Trick bei diesen Aufgaben besteht oft darin, die Gleichung in ein Nullstellenproblem umzuformen, dann die Stetigkeit der Funktion zu beweisen, dann die Funktion an den Randpunkten auswerten. Da sie an einem Randpunkt positiv ist und am anderen negativ, folgt aufgrund der Stetigkeit, dass es in diesem Intervall eine Nullstelle geben muss, womit die ursprüngliche Gleichung erfüllbar ist.

13. Differenzialrechnung

13.1 Die Ableitung

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in \Omega$ und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Die *Ableitung* der Funktion f an der Stelle x_0 ist der folgende Grenzwert (falls existent)

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Äquivalent zu der obigen Formel kann man schreiben

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

wobei hier $x = x_0 + h$ geschrieben wurde. Die Ableitung hat folgende geometrische Interpretation: $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Die *Tangente* an der Kurve $y = f(x)$ an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ hat die folgende Gerade

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Das ist die beste lineare Approximation von f in der Nähe von x_0 .

Ableiten über die Definition: Man bildet eine Form des Differentialquotienten und bestimmt den Grenzwert. Wir werden aber praktischere Methoden kennenlernen.

13.2 Differenzierbarkeit

Def. $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ *differenzierbar*, falls die Ableitung an der Stelle x_0 existiert, d.h. falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Ist f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so heisst f auf Ω differenzierbar.

Bem: Die Aufgabe, eine vorgegebene Funktion auf Differenzierbarkeit zu prüfen, besteht also einfach darin, zu zeigen, dass der Grenzwert $f'(x)$ existiert. Dazu bildet man einfach eine Form des Differentialquotienten und bestimmt den Grenzwert. Falls an allen Stellen existiert ist f differenzierbar.

13.3 Stetigkeit, Differenzierbarkeit und der Raum $C^1(\Omega)$

Es ist klar, dass eine stetige Funktion nicht notwendigerweise differenzierbar sein muss. Zum Beispiel ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ an der Stelle $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar, weil der Grenzwert

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \pm 1.$$

nicht existiert.

Differenzierbare Funktionen sind aber immer stetig.

Thm. Sei $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann ist f an der Stelle x_0 stetig. Also

$$f \text{ differenzierbar} \implies f \text{ stetig.}$$

$$f \text{ nicht stetig} \implies f \text{ nicht differenzierbar.}$$

Wichtig: Stetigkeit ist also eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Differenzierbarkeit einer Funktion!

Def. Eine Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst von der *Klasse* C^1 , falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist und die Ableitung $f': \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf Ω stetige Funktion ist.

13.4 Ableitungsregeln

Thm. (Ableitungsregeln) Sind $f, g: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, so sind es auch $f + g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ falls g keine Nullstellen hat). Die Ableitungen sind

- Summenregel

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- Produktregel

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Bem: Die Aussagen folgen direkt aus den entsprechenden Regeln für Grenzwerte.

13.5 Die Kettenregel

Thm. (Kettenregel) Es seien $f: \Omega \rightarrow f(\Omega)$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f(\Omega) \subset U$ an den Stellen $x_0 \in \Omega$ beziehungsweise $f(x_0) \in U$ differenzierbar. Dann ist die Komposition

$$g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

an der Stelle x_0 differenzierbar und die Ableitung lautet

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Bem: Merkregel: Äussere mal innere Ableitung.

13.6 Der Umkehrsatz

Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $(c, d) := (f(a), f(b))$. Dann ist die Umkehrabbildung

$$f^{-1}: (c, d) \rightarrow (a, b)$$

definiert.

Thm. Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Dann ist die Umkehrabbildung

$$f^{-1}: (c, d) \rightarrow (a, b)$$

differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

wobei $y = f(x)$.

Def. Eine Abbildung $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ heisst *Diffeomorphismus*, falls f invertierbar ist und f, f^{-1} von der Klasse C^1 sind.

Direkt: Ableitung der Umkehrfunktion

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Der Umkehrsatz besagt somit, dass eine differenzierbare Abbildung mit nicht verschwindender Ableitung lokal ein Diffeomorphismus ist.

Um zu zeigen, dass $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ ein (globaler) Diffeomorphismus ist, muss man zusätzlich auch die Injektivität von f nachweisen.

Ableitung einer Funktion anhand der Umkehrfunktion bestimmen

Bsp: Bestimme $(\arcsin(x))'$ anhand von $\sin(x)$.

$$y = \sin(x) \implies x = \arcsin y$$

$$y' = \cos(x) \implies x' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\text{Somit ist } \arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13.7 Anwendung der Ableitungsregeln auf die Untersuchung der Differenzierbarkeit

Anhand der Ableitungsregeln können wir sagen, ob Funktionen, die aus Kompositionen von Funktionen bestehen, ableitbar sind. Allfällige Problemstellen müssen speziell untersucht werden. Dazu bildet man den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert und untersucht, ob er existiert und gleich ist. Falls ja für alle Problemstellen, ist die Funktion differenzierbar.

Achtung: Beim Bilden des Grenzwertes, wenn man $f(x_0)$ verwendet, muss man f genau so nehmen,

wie sie für x_0 definiert ist, auch wenn $f(x)$ für eine jeweilige Seite anders definiert ist.

Wichtig: Stetigkeit ist eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit.

13.8 Höhere Abl. und der Raum $C^m(\Omega)$

Def. Rekursiv definiert man: f heisst an der Stelle x_0 m -mal differenzierbar, wenn f in einer Umgebung von x_0 $(m-1)$ -mal differenzierbar und $f^{(m-1)}$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist. Die m -te Ableitung ist

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x_0) = f^{(m)}(x_0) := (f^{(m-1)})'(x_0).$$

Thm. Weil differenzierbare Funktionen automatisch stetig sind, gilt: Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf Σ m -mal differenzierbar, so sind die Funktionen

$$f, f', \dots, f^{(m-1)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig.

Bem: Die Stetigkeit der m -ten Ableitung ist aber i. Allg. nicht erfüllt. Daher die nächste Definition.

Def. Eine Funktion f heisst *von der Klasse C^m* , falls f m -mal differenzierbar ist und $f, f', \dots, f^{(m)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind. Wir notieren

$$C^m(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist von der Klasse } C^m\}$$

Man sagt, dass f von der Klasse C^∞ ist, falls f von der Klasse C^m für alle m ist. Die Menge der Abbildungen f der Klasse C^∞ auf der offenen Menge Ω bezeichnet man mit $C^\infty(\Omega)$.

Thm. Es gilt

$$f \in C^1(\Omega) \implies f \in C(\Omega), \quad \text{und}$$

$$f \in C^{m+1}(\Omega) \implies f \in C^m(\Omega).$$

Sodass die folgenden Inklusionen gelten

$$C(\Omega) \supset C^1(\Omega) \supset C^2(\Omega) \supset \dots \supset C^\infty(\Omega).$$

Prüfen, ob eine Funktion in C^m ist

Vorgehen: Wir haben zu untersuchen, ob eine Funktion f in C^m ist. Dazu unternehmen wir folgende Schritte, sobald einer nicht klappt folgt daraus, dass f nicht in C^m ist.

Für $i := 1 \dots m$:

- Wir schauen, ob $f^{(i-1)}$ stetig ist auf dem Definitionsbereich (siehe Stetigkeitsbeweise, z.B. Kompositionsargument, Problemstellen untersuchen, ...).
- Wir schauen, ob $f^{(i-1)}$ auf dem Definitionsbereich differenzierbar ist.

3. Wir berechnen die nächste Ableitung $f^{(i)}$.

4. Wir untersuchen, ob die i -te Ableitung stetig ist. Falls ja, können wir daraus schliessen, dass $f \in C^i$.

Wenn die Schleife erfolgreich bis und mit $i = m$ durchlaufen konnte können wir daraus schliessen, dass $f \in C^m$.

13.9 Monotone und Konvexe Funktionen

13.9.1 Monotone Funktionen

Def. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heisst

- (streng) *monoton wachsend*, wenn f.a. $x, y \in \Omega$
 $x < y \implies f(x) (<) \leq f(y)$
- (streng) *monoton fallend*, wenn f.a. $x, y \in \Omega$
 $x < y \implies f(x) (>) \geq f(y)$

gilt.

Thm. Offenbar sind streng monotone fallende oder wachsende Funktionen stets injektiv, weil keine zwei Punkte existieren können, welchen derselbe Wert zugeordnet wird.

Thm. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls für alle $x \in (a, b)$ gilt

- $f'(x) \geq 0$ (> 0) $\implies f$ auf $[a, b]$ (streng) mon. wa.
- $f'(x) \leq 0$ (< 0) $\implies f$ auf $[a, b]$ (streng) mon. fal.

13.9.2 Konvexe Funktionen

Def. Eine Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst

- konvex*, wenn
 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$
- konkav*, wenn $-f$ konvex ist, d.h. wenn
 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt.

TODO Bild aktivieren

In anderen Worten: Eine Funktion f ist konkav (konvex), wenn die Sekante durch je zwei Punkte P_1 und P_2 des Graphen von f unterhalb (oberhalb) des Graphen liegt.

Thm. Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann ist f genau dann

- konvex, wenn $f''(x) \geq 0$,
- konkav, wenn $f''(x) \leq 0$,

für alle $x \in \Omega$ gilt.

Best. ob eine Funktion konvex oder konkav ist

Vorgehen: Man berechnet die zweite Ableitung von f und schaut ob sie über ihrem Definitionsbereich Ω immer grösser oder kleiner gleich null ist.

Bsp: Ist $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$ auf \mathbb{R}^+ konkav oder konvex?

Man berechnet dazu zuerst die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^x)'' = (e^{\ln(x^x)})'' = (e^{x \cdot \ln(x)})'' \\ &= \left(e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) \right)' \\ &= \underbrace{x^x}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(\ln(x) + 1)^2 + \frac{1}{x}}_{> 0}. \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist für alle $x \in \mathbb{R}^+$ positiv und somit ist f konvex.

13.10 Der Mittelwertsatz

Thm. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bem: Das heisst, es gibt eine Stelle $c \in (a, b)$, und die Steigung in c bzw. $f'(c)$ entspricht genau dem Differenzenquotient an den Stellen a und b .

Beweise anhand des Mittelwertsatzes

Vorgehen: Man Formt was zu beweisen ist um, in eine Gleichung, die der des MWS entspricht.

Vorgehen: Bei Beweisen mit dem MWS versucht man das Intervall geschickt zu wählen (beliebige Punkte, oder spezifische Ausdrücke), so dass beim Anwenden des MWS eine Gleichung entsteht, die zu beweisen ist, schon sehr ähnlich ist. Dann muss man eventuell noch abschätzen, und umformen um die zu zeigende Gleichung zu erhalten. Bei einfacheren Aufgaben, geht es einfach darum die MWS-Gleichung aufzustellen und daraus Eigenschaften von einer Funktion abzuleiten. In selteneren Fällen muss man eine Hilfsfunktion aufstellen.

14. Die Taylorschen Formeln

Ziel dieses Kapitels ist die Approximation von C^m -Funktionen mithilfe von Polynomen.

14.1 Das Taylorpolynom und die Taylorsche Formel

Def. Das Polynom

$$P_m^a(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m$$

$$P_m^a(x) := \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

heisst *Taylorpolynom m-ter Ordnung* von $f(x)$ an der Stelle $x = a$. Wir erwarten, dass die Funktion $f(x)$ umso besser vom Taylorpolynom P_m^a approximiert wird, je mehr Ableitungen der beiden Funktionen an der Stelle a übereinstimmen, d.h. je grösser m ist. Wir sind hauptsächlich am Fehler beider Approximation interessiert. Dieser Fehler ist durch den *m-ten Restterm* gegeben

$$R_m^a(x) := f(x) - P_m^a(x).$$

Thm. (Taylorsche Formel n -ter Ordnung) Sei $f \in C^m([a, b])$ auf (a, b) $m + 1$ -mal differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(x) = P_m^a(x) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)(x-a)^{m+1}$$

Bem: Die Taylorsche Formel liefert somit eine Approximation einer Funktion durch ein Polynom vom Grad m und liefert eine explizite Formel für den Fehlerterm

$$R_m^a(x) = \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)(x-a)^{m+1},$$

wobei ξ eine Zahl ist, welche zwischen a und b liegt.

15. Folgen stetiger Funktionen

Def. Eine *Folge stetiger Funktionen* ist eine Folge $f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Folgenglieder f_n stetige Funktionen auf Ω sind.

Bem: Für jedes n haben wir also eine stetige Funktion von x .

Bem: Die Fragen, die entstehen sind: Für welche $x \in \Omega$ konvergiert $f_n(x)$? Wie sieht die Grenzfunktion $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$ aus? Unter welchen Bedingungen ist $f(x)$ stetig? Was ist der Wert von $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$?

Bem: Diese Konzepte erlauben uns Tricks anzuwenden wie z.B. das Integral und den Limes in der obigen Berechnung zu vertauschen (nur erlaubt, falls f_n auf Ω gleichmässig konvergiert), womit die obige Berechnung mit einem reduzierten Rechenaufwand durchgeführt werden kann.

15.1 Punktweise vs. Gleichmässige Konvergenz

Def. Eine Folge stetiger Funktionen $f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert *punktweise* gegen $f(x)$, falls

$$\forall x \in \Omega \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Die Grenzfunktion $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ heisst *punktweiser Limes* der Folge $f_n(x)$.

Bem: um eine vorgelegte Folge stetiger Funktionen auf punktweise Konvergenz zu überprüfen, muss man also einfach x festhalten und den Limes von $f_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ berechnen.

Bem: Die punktweise Konvergenz ist der natürlichste Konvergenzbegriff, er ist aber nicht stark genug, um Limes und Integral vertauschen zu dürfen. Deshalb hat man noch den etwas stärkeren Konvergenzbegriff der gleichmässigen Konvergenz eingeführt.

Def. Eine Folge stetiger Funktionen $f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert *gleichmässig* gegen f , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Bem: Die gleichmässige Konvergenz impliziert die punktweise Konvergenz.

Thm. Sei $f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen. Falls f_n gegen f gleichmässig konvergiert, ist f stetig.

Bem: Der Satz ist in seiner Umkehrung oft sehr nützlich.

Thm. (Dini) Sei $f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen mit punktwisem Limes f und sei Ω kompakt. Ist f stetig und f_n monoton wachsend, so konvergiert f_n gleichmässig gegen f .

Def. Eine *monoton wachsende Folge von stetigen Funktionen* ist eine Folge $f_n(x)$, für welche $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle $x \in \Omega$ gilt.

Achtung: Das heisst nicht dass f_n jeweils monoton wachsend ist.

Kochrezept für Gleichmässige Konvergenz

Gegeben: Folge stetiger Funktionen: $f_n: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Gefragt: Konvergiert f_n auf Ω gleichmässig?

Schritt 1: Berechne den punktwisem Limes von f_n auf Ω , d.h.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{für fixes } x \in \Omega$$

Schritt 2: Prüfe f_n auf gleichmässige Konvergenz.

Direkte Methode:

i) Berechne

$$\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|.$$

Zu diesem Zweck ist es oft nützlich, die Ableitung nach x von $|f_n(x) - f(x)|$ zu berechnen und diese gleich Null zu setzen.

ii) Bilde den Limes für $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|.$$

Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$, so ist f_n auf Ω gleichmässig konvergent.

Indirekte Methoden:

- f unstetig \implies keine gleichmässige Konvergenz.
- f stetig, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \forall x \in \Omega$ und Ω kompakt \implies gleichmässige Konvergenz.

Teil IV

Integralrechnung in \mathbb{R}

Die Integralrechnung hat zwei Aspekte:

- Integrieren als Umkehrung des Differenzierens mit einer Funktion(sklasse) als Ergebnis
- Bestimmte Integrale mit einem Zahlenwert als Ergebnis

16. Unbestimmte Integrale

Def. Das Integrieren als Umkehrung des Differenzierens ist das *Aufsuchen einer Stammfunktion* F zu einer gegebenen *stetigen* Funktion f , sodass $F'(x) = f(x)$ für alle x im Definitionsbereich von f gilt. Es wird also eine Funktion F gesucht, deren Ableitung gerade die vorgelegte Funktion f ist. Die Funktion F wird als Stammfunktion von f bezeichnet und symbolisch wird

$$F(x) = \int f(x) dx = \int F'(x) dx$$

geschrieben. Beim Integrieren tritt immer eine *Integrationskonstante* $C \in \mathbb{R}$ auf, da mit F auch $F + C$ eine Stammfunktion ist.

16.1-16.2 Elementare Integrale

Elementare Integrale, lassen sich durch Umkehrung der Ableitung direkt angeben.

$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha, (\alpha \neq 0)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + C$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh}(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh}(x) + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh}(x) + C$
$\tan(x)$	$-\log(\cos(x)) + C$
$\log(x)$	$x(\log(x) - 1) + C$

Weiss nicht, ob ich diese verwenden darf:

$$\int \cos(x) \sin^n(x) dx = \text{constant} + \frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1}$$

$$\int \sin(x) \cos^n(x) dx = \text{constant} - \frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1}$$

16.3 Direkte Integrale

Def. Direkte Integrale sind Integrale der Form

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

$$\int (f \text{ ausgewertet in } g) \cdot (\text{Ableitung von } g(x)) dx.$$

wobei f eine *stetige* und g eine *differenzierbare* Funktion ist.

Bem: Wir können eine allgemeine Formel für solche Integrale mittels der Kettenregel bekommen. Ist F eine Stammfunktion von f so gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Thm. Hat der Integrand die Form $f(g(x)) \cdot g'(x)$, so gilt unmittelbar folgendes

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x))$$

= Stammfunktion von f in $g(x)$ ausgewertet.

Vorgehen: Man versucht das Integral in ein Produkt $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ zu zerlegen, integriert dann

$f(x)$ und bekommt $F(x)$. Danach setzt man $g(x)$ ein und erhält $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$:

Trick: Es gibt mehrere Tricks:

- Ein Muster aus den Elementaren Integralen erkennen
- 0 addieren
- Mit 1 multiplizieren, einmal innerhalb und ausserhalb des Integrals, um den gewünschten Faktor im Nenner oder Zähler zu erhalten.
- Integral in zwei Integrale aufteilen

16.4 Partielle Integration

Die partielle Integration erlaubt die Integration von Produkten. Die partielle Integration ergibt sich aus der Umkehrung der Produktregel der Differenzialrechnung:

Thm. TODO Prerequisites (g diffbar?)

$$\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$$

Achtung, bei einem bestimmten Integral darf man nicht vergessen das bestimmte Integral von $[f \cdot g]_a^b$ zu bilden:

$$\int_a^b f' \cdot g dx = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f \cdot g' dx$$

Vorgehen: Für die Berechnung von $\int F(x) dx$ mittels partieller Integration versucht man, den Integranden als Produkt von zwei Funktionen

$$F = f' \cdot g$$

zu schreiben, wobei nun die Funktion f' integriert (\uparrow) und g abgeleitet (\downarrow) wird. Wie genau man erkennt, welche Funktion die Rolle von f' und welche die von g einnimmt, hängt stark von der Situation ab. Es gibt keine allgemeine Regel. Für die meisten Situationen kann folgende Tabelle hilfreich sein:

(\uparrow), bzw. $f' :=$	1 (falls arc-Funktion oder Logarithmus vorkommt), x^n , $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$, ...
(\downarrow), bzw. $g :=$	x^n , $\log(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\operatorname{arcsinh}(x)$, $\operatorname{arcosh}(x)$, $\operatorname{arctanh}(x)$, ...
"egal"	e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, ...

Danach schreibt man sich $f'(x)$ und $g(x)$ nebeneinander hin und wendet die operationen an:

$$\begin{array}{ll} f'(x) := \dots & g(x) := \dots \\ (\uparrow \text{ integrieren}) & (\downarrow \text{ ableiten}) \\ f(x) := \dots & g'(x) := \dots \end{array}$$

Nachdem man $f(x)$ und $g'(x)$ ausgerechnet hat, schreibt man sich durch einsetzen den rechten Teil

dieser Gleichung hin.

$$\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int f \cdot g' dx$$

Das Ziel der ganzen Sache, ist, dass das zweite integral (rechts) einfacher wird, und es sich somit einfacher als das ursprüngliche bestimmen lässt (evtl. auch erst nach ein paar Schritten).

Trick: Zum Lösen partieller Integrale gibt es eine Reihe verschiedener Tricks:

- Quadrate, oder Potenzen in Produkt zerlegen, um Produkt zu erhalten
- Bei komplizierten Funktionen (wie z.B. \log , \arcsin , ...) mit 1 multiplizieren und $f' = 1$ nehmen.
- Substitution mit durch trigonometrische Identitäten
- Partielle Integration mehrmals anwenden, bis sich das Integral auflösen lässt, oder bis man wieder das ursprüngliche Integral erhält, und es per Auflösen der Gleichung erhalten kann (eg. $I = \dots - I \rightarrow 2I = \dots \rightarrow I = \frac{1}{2}(\dots)$).

16.6 Die Substitutionsregel

Hierbei versucht man die Variablen und evtl. vorhandenen Integrationsgrenzen durch eine abhängige Variable zu ersetzen, so dass das Integral einfacher zu lösen wird.

Die Idee der Substitution besteht darin, eine Variablentransformation

$$y = g(x) \iff x = g^{-1}(y)$$

durchzuführen. Dabei ist g ein Diffeomorphismus, d.h. eine in beiden Richtungen stetig differenzierbare Abbildung.

Thm. Substitutionsregel Ist f stetig und g wie oben, dann gilt

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(y) dy$$

Bem: Die Substitutionsregel folgt unmittelbar aus der Kettenregel.

Vorgehen: Falls wir die Schreibweise mit dem " dx " für die Ableitung von g benutzen

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) \iff dy = g'(x)dx$$

gilt folgender Merksatz: Um $\int f(y) dy$ zu berechnen substituier $y = g(x)$ im Integrand und ersetze das " dy " mit " $g'(x)dx$ " mit dem Ziel, dass das neue Integral $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$ leichter zu bestimmen ist als das ursprüngliche. Nach dem Integrieren muss man wieder für y die Ursprüngliche Funktion $g(x)$ einsetzen d.h. rücksostituieren.

Vorgehen: Oft beginnt man mit einem Integral, und substituiert dann einen Teil

$\int \dots$ eins odere mehreren $g(x)$ erscheinen $\dots dx$

Substitution von $g(x)$ durch y :

$$y = g(x) \iff x = g^{-1}(y) \\ dx = g^{-1'}(y)dy$$

Man ersetzt also x mit $g^{-1}(y)$ und dx mit $g^{-1'}(y)dy$. Danach löst man das Integral nach y (evtl. mit noch einem anderen Verfahren) und substituiert dann irgendwann alle y mit $y = g(x)$ zurück, so dass ein Ausdruck abhängig von x entsteht.

Trick: Welche Substitution sich jeweils am besten eignet zeigen wir anhand von typischen Situationen. Integrale von Funktionen, die $\{A \text{ Ausdruck}\}$ enthalten löst man oft mit der Substitution:

* e^x , $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, ...:

$$e^x = t \quad (dx = \frac{1}{t} dt)$$

* $\log(x)$:

$$\log(x) = t, \quad (dx = e^t dt)$$

* $\sqrt[n]{Ax+B}$:

$$\sqrt[n]{Ax+B} = t \Rightarrow Ax+B = t^n$$

* $\cos(x)$, $\sin(x)$ in geraden Potenzen oder $\tan(x)$:

$$\tan(x) = t \quad \left(dx = \frac{1}{1+t^2} dt\right)$$

Für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ wird dann entsprechend substituiert. Man bildet dann damit einfach höhere Potenzen falls man es braucht.

$$\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$$

* $\cos(x)$, $\sin(x)$ in ungeraden Potenzen:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad \left(dx = \frac{2}{1+t^2} dt\right)$$

Entsprechend wird für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ folgendermassen substituiert:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

* $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ im Nenner:

Mittels quadratischer Ergänzung werden diese Integrale auf einen der folgenden Fälle zurückgeführt:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arcsinh}(x) + C.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccosh}(x) + C,$$

* $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ im Zähler:

Mittels quadratischer Ergänzung werden diese Integrale auf einen der folgenden Formen gebracht und dann mithilfe der folgenden Substitutionen gelöst:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{Substitution } x = \sin(t)$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{Substitution } x = \sinh(t)$$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx \quad \text{Substitution } x = \cosh(t)$$

16.X Logarithmisches Integrieren

Diese Identität ist in beiden Richtungen sehr nützlich. Zum Beispiel, wenn man ein Integral bestimmen muss, wobei der Nenner (evtl. um einen konstanten Faktor noch verschieden) die Ableitung des Nenners ist. Oder wenn man bei Gleichungen y'/y integriert kann man dann das dann gleich mit $\ln(y)$ ersetzen. Oder beim Lösen von Differentialgleichungen.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{y'}{y} dx = \ln|f(x)| + C$$

Der Beweis ist ganz einfach, da die Ableitung von der rechten Seite genau den Integrationsterm ergibt.

16.X Partialbruchzerlegung (PBZ)

Falls das Zählerpolynom einen höheren Grad als das Nennerpolynome hat eine Polynomdivision durchführen und mit dem Rest eine PBZ durchführen.

- Einfache Nullstelle $\frac{A}{x-x_1}$
- m -fache Nullstelle $\frac{A}{(x-x_1)} + \dots + \frac{A}{(x-x_1)^m}$
- Komplexe Nullstelle $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$
- m -fache komplexe NS: analog wie m -fach

Dann Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich machen.

17. Bestimmte Integrale

17.1 Definition

Def. Sei $F(x) = \int f(x) dx$ die Stammfunktion der stetigen Funktion f . Das *bestimmte Integral* von f

von a bis b ($a < b$) ist

$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Für $a > b$ setzt man

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Ausserdem definiert man $\int_a^a f(x) dx$.

17.2 Eigenschaften

Das bestimmte Integral erfüllt die folgenden Eigenschaften

a) Linearität:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

b) Gebietsadditivität:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

c) Positivität:

$$\forall x \in [a, b]: (f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0)$$

d) Monotonie:

$$\forall x \in [a, b]: (f(x) \geq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx)$$

e) Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

f) Merksatz:

Ist $f(x)$ ungerade, so gilt für alle um den Ursprung symmetrischen Integrale $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

18. Spezielle Funktionen

18.1 Die Gamma-Funktion

Def. Viele bestimmte Integrale können mithilfe der *Gamma-Funktion* berechnet werden. Die Gamma-Funktion ist für $\alpha > 0$ wie folgt definiert

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Sie hat die folgenden wichtigen Eigenschaften

- (1) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$,
- (2) $\Gamma(n) = (n - 1)!$ falls $n \in \mathbb{N}$,
- (3) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,
- (4) $\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$, ($0 < \alpha < 1$).

Wegen der Eigenschaft (2), wird die Gamma-Funktion oft auch *Fakultätsfunktion* genannt. Gemeint ist, dass die Gamma-Funktion eine Verallgemeinerung der Fakultät auf den reellen Zahlen ist.

Vorgehen: Die Gamma-Funktion eignet sich sehr gut, um Integrale der Form

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-g(x)} dx$$

zu bestimmen, welche mit der Substitution $t = g(x)$ gelöst werden.

Teil V

Differenzialgleichungen

21 Differenzialgleichungen: Grundbegriffe

21.1 Differenzialgleichungen

Def. Eine *Differenzialgleichung* ist eine Gleichung in welcher eine unbekannte Funktion $y(x)$ einer oder mehrerer Variablen und ihre Ableitungen vorkommen. Im Fall, dass $y: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion ist, spricht man von einer *gewöhnlichen Differenzialgleichung*. Eine allgemeine (gewöhnliche) Differenzialgleichung ist somit eine Gleichung der Form

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0$$

Def. Die *Ordnung* einer Differenzialgleichung ist die Ordnung der höchsten Ableitung, die in der Differenzialgleichung vorkommt.

Bem: Man schaut hier nur auf die Potenzen, falls e^y oder $\sin(y)$ vorkommen schaut man trotzdem nur auf die Potenzen (e.g., y^2).

Def. Eine Differenzialgleichung heisst *linear*, falls für je zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der Differenzialgleichung auch jede Linearkombination $ay_1(x) + by_2(x)$ eine Lösung derselben Gleichung ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn y und alle Ableitungen y', y'', \dots linear (also nicht in Potenzen (e.g., $(y'(x))^2$)) vorkommen.

21.2 Anfangswertprobleme

Def. Ein *Anfangswertproblem* n -ter Ordnung ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung n -ter Ordnung zusammen mit n Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

21.3 Grundprinzip für lineare, inhomogene Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung hat folgende Form

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

wobei $y_h(x)$ die allgemeine Lösung des zugehörigen *homogenen Problems* (d.h. die Differenzialgleichung ohne den inhomogenen Term) und $y_p(x)$ eine *partikuläre Lösung* des inhomogenen Problems ist.

Vorgehen: Die allgemeine Lösungsprozedur für Differenzialgleichungen erfolgt in drei Schritten:

- (1) Lösen der homogenen Gleichung (ohne inhomogenen Term);
- (2) Bestimmen einer partikulären Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Gleichung; anhand eines geeigneten Ansatzes
- (3) Die allgemeine Lösung $y(x)$ der inhomogenen Gleichung ist die Summe der homogenen und partikulären Lösung, d.h.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

22. Differenzialgleichungen erster Ordnung

22.1 Differenzialgleichungen erster Ordnung

Def. Eine *Differenzialgleichung erster Ordnung mit getrennten Variablen* (auch separierbare Differenzialgleichung genannt) ist eine Gleichung der Form

$$y' = \frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y), \quad \text{mit } g(y) \neq 0.$$

Vorgehen: Man trennt sozusagen die Variablen x und y , indem man durch $g(y)$ dividiert und das dx auf die andere Seite der Gleichung bringt

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x) dx.$$

Wie man sieht, hängt nun keine Variable mehr von der anderen ab. Somit kann man auf beiden Seiten integrieren

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx.$$

Es werden beide Integrale gelöst und man bekommt eine Gleichung in Abhängigkeit von x und y , die man nach y auflösen kann. Da die vorkommenden Integrale unbestimmt sind, enthält $y(x)$ eine In-

tegrationskonstante C , welche man im Fall eines Anfangswertproblems aus der *Anfangsbedingung*

$$y(x_0) = y_0$$

bestimmen kann.

22.2 Variation der Konstanten

Bei Differentialgleichungen erster Ordnung kann man, sofern man die homogene Lösung mittels Trennung der Variablen schon bestimmt hat, die partikuläre Lösung mittels Variation der Konstanten bestimmen.

Durch die Variation der konstanten versuchen wir, einen geeigneten Ansatz für die partikuläre Lösung aus der homogenen Lösung zu bestimmen. Dieser Ansatz für die partikuläre Lösung ergibt sich aus der Kenntnis der zugehörigen homogenen Lösung. Die in der homogenen Lösung auftretende Integrationskonstante C wird einfach als eine von x abhängige Funktion aufgefasst:

$$C \mapsto C(x)$$

Daher kommt der Name *Variation der Konstanten*.

Vorgehen:

1. In $y_h: C$ durch $C(x)$ ersetzen \rightarrow ergibt y_p .
2. y_p (mit dem $C(x)$) ableiten, um y_p' zu erhalten.
3. y_p und y_p' in die ursprüngliche DGL einsetzen und nach $C(x)$ auflösen.
4. Hat man $C(x)$, kann man dieses benutzen für die partikuläre Lösung.
5. Die Lösung der DGL kann jetzt als Summe der homogenen und partikulären Lösung geschrieben werden.
6. Das C von der homogenen Lösung wird mithilfe der Anfangsbedingungen bestimmt.

23. Differenzialgleichungen n -ter Ordnung

Während Differenzialgleichungen höherer Ordnung im Allgemeinen schwierig zu lösen sind, gibt es für lineare, homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit *konstanten Koeffizienten* explizite Lösungsverfahren.

23.1 Lineare, homogene Differenzialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Def. Eine allgemeine lineare, homogene Differenzialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

zienten lautet

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0,$$

wobei $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$.

Bsp: Den folgenden Teil

$$\dots + c_i e^{(2+3i)x} + c_{i+1} e^{(2-3i)x} + \dots$$

schreibt man am besten

$$\dots + e^{2x} (\tilde{c}_i \sin(3x) + \tilde{c}_{i+1} \cos(3x)) + \dots$$

Wie man sieht wurde einfach der Realteil im Exponenten von e behalten und der Betrag des Imaginärteils in die $\sin(\cdot)$ und $\cos(\cdot)$ reingeschrieben. Die Konstanten sind zwar nicht mehr gleich, aber es sind immer noch zwei (mit neuen Koordinaten bezüglich der neuen Basis).

Bem: Es ist wichtig einzusehen, dass die Koeffizienten c_1, \dots, c_n komplex sein können! (siehe S. 424, Michelis)

Bem: Das entspricht einer Basistransformation.

23.2 Lineare, inhomogene Differenzialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Störfunktion $b(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
$P_n(x)$	$R_n(x)$
$P_n(x)e^{\mu x}$	$R_n(x)e^{\mu x}$
$P_n(x) \sin(\nu x),$ $P_n(x) \cos(\nu x),$	$R_n(x) \sin(\nu x)$ $+ S_n(x) \cos(\nu x)$
$P_n(x) \sin(\nu x)$ $+ Q_n(x) \cos(\nu x)$	
$P_n(x)e^{\mu x} \sin(\nu x),$ $P_n(x)e^{\mu x} \cos(\nu x),$	$e^{\mu x} (R_n(x) \sin(\nu x)$ $+ S_n(x) \cos(\nu x))$
$P_n(x)e^{\mu x} \sin(\nu x)$ $+ Q_n(x)e^{\mu x} \cos(\nu x)$	

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \mu, \nu \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$$

Wichtig: Liegt eine Linearkombination der Störfunktionen vor, so hat man auch als Ansatz eine entsprechende Linearkombination zu wählen.

Wichtig: Falls $\lambda = \mu + i\nu$ eine m -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms (siehe Bestimmung von y_h) ist, so muss man den Ansatz für $y_p(x)$ mit dem Faktor x^m multiplizieren.

Bem: Analog gelten die Regeln auch für $\sinh(\cdot)$ und $\cosh(\cdot)$. Es ist einfach wichtig, dass $y_p(x)$ eine Funktion derselben Form wie $b(x)$ ist.

Bsp: **TODO** Ich mache ein Megabeispiel, das alles beinhaltet:

• Anfangsbedingungen, zum Bestimmen der c_1, \dots, c_n der homogenen Lösung (wo der Existenzsatz gebraucht wird)

• Mehrfache Nullstellen in der homogenen Lösung, auch zwei (konjugiert) komplexe Nullstellen, die in die reelle Lösung umgewandelt werden (z.B. Seite 424), mit dem $\sin \cos$ Trick

• Die Partikuläre aus mehreren komplizierten Ansätzen besteht (wo man auch noch mit x^m multiplizieren muss). Und wo man die Lösung der partikulären Funktion in zwei Summanden splittet.

Tricks zum Finden der Nullstellen: Satz von Vieta

Lösung ist ganzzahlig \implies Lösung teilt Leitkoeffizienten und für e^A die Formel

Satz von Vieta sagt noch mehr, $-i$ genau aufschreiben.

TODO: Tricks aufschreiben, wie man die Polynomdivision vermeidet (Koeffizientenvergleiche etc.) (Faktoren ausmultiplizieren und den Rest bestimmen). Tricks von Igor.

Komplexe Nullstellen treten immer konjugiert komplex auf!

Einsetzen

Für Multiplizitäten: Wenn eine Lösung m -Fach ist, dann ist sie auch eine Nullstelle bis zur m -fachen Ableitung der Gleichung **TODO** Noch genau aufschreiben.

Was gab es noch für Regeln mit geraden und ungeraden Polynomen? Das war auch so ein Abkürzungstrick. Oder bezog sich das auf die Symmetrie (gerade \implies y-Achsensymm, ungerade \implies , Punktsymm. zum Nullpunkt)

Biquadratische Gleichungen, Substitution: $\lambda^2 = \eta$.

24. Systeme von Differenzialgleichungen

In Matrixschreibweise sind die DGL als LGS gegeben:

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}$$

Das Lösen von solchen Gleichungen erfolgt durch die Bestimmung der sogenannten Exponentialmatrix e^{Ax} . Deshalb definieren wir sie hier gleich:

Def. Rein formal lässt sich für jede Matrix A die Exponentialmatrix e^A wie folgt definieren

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Die Exponentialmatrix e^A lässt sich also im Prinzip aus Potenzen von A (d.h. $A^0 = I, A, A^2, A^3, \dots$)

berechnen. Die Bestimmung aller Potenzen von A kann aber schwierig werden, weil es nicht immer einfach ist eine allgemeine Formel für A^k herzuleiten. Es gibt aber 5 typische Situationen:

1. **A ist diagonal:**

Dann ist $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und somit $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$. Somit ergibt sich die Exponentialmatrix von A ganz einfach:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$$

2. **A ist diagonalisierbar:** $A = TDT^{-1}$

Für solche Matrizen werden die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, und die entsprechenden Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ bestimmt. Dann benutzt man

$$e^A = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

wobei $T = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, d.h. \vec{v}_1 ist Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 usw..

24.1 Homogene Systeme von Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Im homogenen Fall, mit konstanten Koeffizienten haben wir die Gleichung

$$\vec{y}' = A\vec{y}.$$

Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = e^{Ax} \cdot \vec{C},$$

wobei $\vec{C} = (C_1, \dots, C_n)$ ein Vektor ist, der die Integrationskonstanten enthält. Die Konstanten C_1, \dots, C_n werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Für den Spezialfall

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0,$$

ist

$$y(x) = e^{Ax} \cdot \vec{y}_0$$

die Lösung. Der Ausdruck e^{Ax} heisst *Fundamentalmatrix*.

24.2 Inhomogene Systeme von Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

24.2.1 Variation der Konstanten

Die *Variation der Konstanten* bietet eine Methode, um die partikuläre Lösung von inhomogenen

Differenzialgleichungssystemen zu bekommen. Dazu betrachten wir das inhomogene Differenzialgleichungssystem

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) + b(x).$$

Gemäss dem Grundprinzip für lineare inhomogene DGL kann man die allgemeine Lösung $y(x)$ schreiben als

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x)$$

Die Lösung des homogenen Problems $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x)$ kann wie im vorherigen Abschnitt beschrieben bestimmt werden

$$\vec{y}_h(x) = e^{Ax} \cdot \vec{C}.$$

Die partikuläre Lösung $\vec{y}_p(x)$ wird durch die Methode der Variation der Konstanten bestimmt, dazu ersetzt man bei der homogenen Lösung einfach den Vektor \vec{C} , der die Integrationskonstanten erhält, durch eine Funktion von x (darum der Name *Variation der Konstanten*). Danach leitet man $\vec{y}_p(x)$ ab:

$$\vec{y}_p(x) = e^{Ax} \cdot \vec{C}(x)$$

$$\vec{y}_p'(x) = A \cdot e^{Ax} \cdot \vec{C}(x) + e^{Ax} \cdot \vec{C}'(x)$$

und setzt $\vec{y}_p(x)$ und $\vec{y}_p'(x)$ in das ursprüngliche DGL für $\vec{y}(x)$ und $\vec{y}'(x)$ ein:

$$\cancel{A \cdot e^{Ax} \cdot \vec{C}(x)} + e^{Ax} \cdot \vec{C}'(x) = \cancel{A \cdot e^{Ax} \cdot \vec{C}(x)} + b(x)$$

$$\iff e^{Ax} \cdot \vec{C}'(x) = b(x)$$

$$\iff \vec{C}'(x) = (e^{Ax})^{-1} \cdot b(x)$$

$$\iff \vec{C}'(x) = e^{-Ax} \cdot b(x)$$

$$\iff \vec{C}(x) = \int e^{-Ax} \cdot b(x) dx$$

Das Integral wird komponentenweise bestimmt. Damit erhalten wir $\vec{C}(x)$ und können es bei $\vec{y}_p(x) = e^{Ax} \cdot \vec{C}(x)$ einsetzen um $\vec{y}_p(x)$ zu erhalten. Damit kann die allgemeine Lösung geschrieben werden:

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x).$$

24.3 Systeme von Differenzialgleichungen erster Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten

In diesem Fall haben wir eine Gleichung der Form

$$\vec{y}'(x) = A(x) \cdot \vec{y}(x) + \vec{b}(x)$$

wobei die Matrix A nun allgemein eine Funktion von x ist. Auch in diesem Fall ist die allgemeine Lösung als Summe einer homogenen und einer partikulären

Lösung gegeben

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Für die homogene Lösung kann man die folgende Formel anwenden

$$y_h(x) = e^{\int A(x) dx} \cdot \vec{C}.$$

Das einzige was sich ändert ist also, dass die Fundamentalmatrix folgendermassen definiert ist $e^{\int A(x) dx}$ (das Integral wird komponentenweise berechnet). Die partikuläre und damit auch allgemeine Lösung kann man wie üblich durch die Variation der Konstanten bestimmen.

Teil VI

Differentialrech. im \mathbb{R}^n

1. Funktionen von mehreren Variablen und partielle Ableitungen

1.1 Funktionen von mehreren Variablen

In diesem Kapitel betrachten wir Funktionen $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. D.h. diese Funktionen ordnen jedem Punkt einer Teilmenge $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ einen Skalar $f(x)$ zu.

Die Niveaulinien für die Höhe $C \in \mathbb{R}$ eines solchen Graphen ergeben sich aus den Punkten im Definitionsbereich, für die f den Wert C annimmt:

$$N_C := \{x \in \Omega \mid f(x) = C\}$$

1.2 Partielle Ableitungen

Sei Ω eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion von n Variablen. Unter *partieller Ableitung* versteht man üblicherweise die Ableitung einer Funktion von mehreren Variablen nach einer dieser Variablen, wobei die anderen Variablen konstant gehalten werden.

Def. (Partielle Differenzierbarkeit) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heisst an der Stelle $a \in \Omega$ nach der Variablen x_i partiell differenzierbar, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i+h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

existiert. Der Limes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ heisst partielle Ableitung von f nach x_i .

Bem: Es gelten die üblichen Produkt-, Quotienten- und Kettenregeln, nur dass man alle anderen Variablen formal als Konstanten behandeln muss.

Bem: Höhere partielle Ableitungen werden rekursiv definiert. Ist die Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz Ω

partiell differenzierbar, so ist die partielle Ableitung von f nach x_i wieder eine Funktion auf Ω

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

von der wir die partielle Differenzierbarkeit. Man bekommt auf diese Art und Weise die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

und analog auch höhere partielle Ableitungen.

Bem: Bei der Bildung höherer Ableitungen ist es wichtig auf die Reihenfolge der Differentiation aufzupassen. Denn $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$ sind nicht immer gleich (siehe Satz von Schwarz).

Def. Die n partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ lassen sich in einem Vektor anordnen

$$\text{grad}(f) = \nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Diesen Vektor nennt man *Gradient* von f und das Symbol ∇ wird *Nabla* genannt (Nabla-operator).

Def. Zweifache partielle Ableitungen der Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kann man in einer $n \times n$ Matrix anordnen, die sogenannte *Hesse Matrix*, welche so definiert ist:

$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Bem: Die Reihenfolge der Indices für die partiellen Ableitungen entsprechen analog den Indices a_{ij} einer üblichen $n \times n$ Matrix (zuerst Zeile, dann Spalte).

1.3 Der Satz von Schwarz

Thm. (Schwarz) Sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Allgemeiner besagt der Satz von Schwarz: Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf Ω m -mal differenzierbar und sind alle m -ten Ableitungen in Ω stetig, so spielt die Reihenfolge der Differentiation bei allen partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq m$ keine Rolle. Eine solche Funktion nennt man *von der Klasse C^m* und gesprochen wird "f ist m -mal stetig differenzierbar".

Bem: Bei $f \in C^m(\Omega)$ ist also $f^{(m)}$ auch noch stetig.

Bem: Es wird keine Stetigkeitsforderung an den ersten partiellen Ableitungen vorausgesetzt, da diese automatisch stetig sind (denn die Differenzierbarkeit impliziert die Stetigkeit)

Trick: Durchs Vertauschen der Reihenfolge der Variablen nach denen partiell abgeleitet wird kann man sich manche Rechenschritte und Arbeit sparen!

1.4 Vektorwertige Funktionen

Betrachtet man m Funktionen $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$ von n Variablen und ordnet man diese in einem Vektor an, so bekommt man eine vektorwertige Funktion von n Variablen. In Formeln heisst es

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Vektorwertige Funktionen ordnen somit jedem Punkt (x_1, \dots, x_n) des Definitionsbereiches Ω einen Vektor mit m Komponenten zu. Natürlich heisst die vektorwertige Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle $a \in \Omega$ partiell differenzierbar, falls jede der Komponenten f_i von f in a partiell differenzierbar ist. In anderen Worten: Partielle Ableitungen werden komponentenweise gebildet. Das *Differential* von f ist die folgende Matrix, welche die n partiellen Ableitungen aller m Komponenten von f enthält

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_1 - \\ \vdots \\ -\nabla f_m - \end{pmatrix}$$

Diese $m \times n$ Matrix wird oft auch *Jacobi-Matrix* genannt und ist, wie wir sehen werden, die Verallgemeinerung der üblichen totalen Ableitung des eindimensionalen Falls.

Bem: Hier wird analog wie bei einer $m \times n$ Matrix einfach zuerst f (oben), dann x (unten) indiziert.

Bem: Die Jacobi-Matrix ist nicht mit der Hesse-Matrix zu verwechseln: Die Jacobi-Matrix ist die Matrix, welche die $m \cdot n$ partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ enthält, während die Hesse-Matrix die Matrix ist, welche die n^2 partiellen Ableitungen zweiter Ordnung einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ enthält. Im Gegensatz zur Jacobi-Matrix ist die Hesse-Matrix immer quadratisch.

2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n

2.1 Stetigkeit in \mathbb{R}^n

Genauso wie im eindimensionalen Fall, heisst eine Funktion von mehreren Variablen $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ stetig, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und an der Stelle x_0 gleich $f(x_0)$ ist.

Bem: Beispiele stetiger Funktionen sind Polynome, rationale Funktionen (solange der Nenner nicht verschwindet), trigonometrische und hyperbolische Funktionen, die Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion, Potenzen und alle Kompositionen solcher Funktionen.

Vorgehen: Wenn man die Stetigkeit einer (mehrdimensionalen) Funktion auf einer Menge Ω zeigen muss, kann man falls es geht die Stetigkeit schon für einen grossen Teil von Ω beweisen, indem man das Argument benutzt, dass die Funktion eine Komposition von stetigen Funktionen ist und deshalb stetig ist. Zu untersuchen bleiben dann die Problemstellen.

Um sicher zu sein, dass der Grenzwert an einer Problemstelle p existiert, müssen wir alle möglichen Richtungen in Ω zu p untersuchen und zeigen, dass man in allen Situationen denselben Wert als Resultat kriegt.

Ein sehr einfacher aber sehr wichtiger Trick erlaubt... Der Trick besteht darin, die Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ einzusetzen. Die Variable r beschreibt die Annäherung zum Nullpunkt, während die Variable φ alle möglichen Richtungen nach der Problemstelle p beschreibt. Die Polarkoordinaten erlauben es sozusagen die "Richtung" von der "Annäherung" zu p trennen. Darum muss man den Grenzwert damit nur noch nach r bilden, also $\lim_{r \rightarrow 0}$, wenn einmal Polarkoordinaten eingesetzt wurden. Wir bleiben somit mit einem eindimensionalen Grenzwert, für den wir wissen, was zu tun ist. Ist das Resultat von φ abhängig, so existiert der Grenzwert nicht, da sein Wert von der Richtung abhängt.

TODO Wie macht man das bei anderen Problemstellen als $(0,0)$ vor? → man muss hier das Koordinatensystem verschieben?

TODO Wie geht es bei Vektorwertigen Funktionen?

TODO Wie geht es bei Funktionen wo die Dimension des Definitionsbereiches höher als 3 ist?

2.2 Differenzierbarkeit

2.2.1 Partielle Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n unterscheidet sich teils deutlich von der Differenzierbarkeit in nur einer Dimension. Dies liegt meistens in der Tatsache, dass in der mehrdimensionalen Differenzialrechnung zwischen partieller Differenzierbarkeit und (totaler) Differenzierbarkeit unterschieden wird.

Def. (Partielle Differenzierbarkeit) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ in Richtung e_i partiell differenzierbar, falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h \cdot e_i) - f(x_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

existiert. Allgemeiner, für $v \in \mathbb{R}^n$ heisst der Ausdruck (falls existent)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} := D_v f(x_0)$$

Richtungsableitung von f an der Stelle x_0 in Richtung v .

Def. ((Totale) Differenzierbarkeit) $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar, falls eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (also eine $m \times n$ Matrix) existiert für welche folgendes gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Im eindimensionalen Fall reicht für die Differenzierbarkeit nur die Existenz der Ableitung als Grenzwert. In mehreren Dimensionen ist die Existenz der partiellen Ableitungen (d.h. der Grenzwert in Richtung aller Input-Dimensionen) *per se* nicht genug. Die Existenz aller partiellen Ableitungen impliziert die partielle Differenzierbarkeit. Die totale Differenzierbarkeit, hingegen, verlangt etwas mehr: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist an der Stelle x_0 (total) differenzierbar, falls f in der Nähe des Punktes x_0 durch die lineare Funktion

$$f(x_0) + A(x - x_0)$$

“gut” approximiert wird. “Gut” bedeutet in diesem Kontext, dass der Restterm $\text{Rest}_{x_0}(x) = f(x) - (f(x_0) + A(x - x_0))$ (der Fehler der Approximation) im Vergleich zu der schon sehr kleinen Grösse $|x - x_0|$ klein ist, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\text{Rest}_{x_0}(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

Diese Bedingung ist stärker als die Existenz der partiellen Ableitungen: Die Differenzierbarkeit impliziert die partielle Differenzierbarkeit, aber nicht

umgekehrt.

$$f \text{ diff'bar} \implies f \text{ partiell diff'bar}$$

Die Matrix A wird als die (totale) Ableitung von f im Punkt x_0 bezeichnet und geschrieben wird oft $f'(x_0) = A$. Ist f überall in Ω differenzierbar, so heisst f auf Ω differenzierbar.

Auf einen ersten Blick scheint die Definition der Differenzierbarkeit in \mathbb{R}^n kompliziert zu sein: Was ist diese lineare Abbildung A , von der man in der Definition spricht? Wie bestimmt man diese? Muss man alle möglichen $m \times n$ Matrizen untersuchen? Die Antwort auf diese Frage ist aus der Definition nicht direkt klar. Es ist aber einfach zu zeigen, dass falls f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, so ist A die Jacobi-Matrix, ausgewertet an der Stelle x_0

$$A = df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Um die Differenzierbarkeit einer vorgelegten Funktion f an der Stelle x_0 zu überprüfen, muss man also einfach die Jacobi-Matrix an der entsprechenden Stelle x_0 berechnen und die Definition 2.2.2 mit $A = df(x_0)$ verifizieren!

Wichtig: Natürlich ist es auch in der mehrdimensionalen Differenzialrechnung richtig, dass Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten (falls Nenner nicht verschwindet) und Kompositionen differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar sind. Dieses Resultat liefert ein sehr nützliches Argument.

2.2.2 Funktionen von der Klasse C^k

Eine Funktion $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst von der Klasse C^1 , falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen von f auf Ω stetig sind. Im Allgemeinen heisst die Abbildung $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^k , falls alle die partiellen Ableitungen der Ordnung k existieren und stetig auf Ω sind. Die Menge der Abbildungen f der Klasse C^k auf der offenen Menge Ω bezeichnet man mit $C^k(\Omega)$. Man sagt, dass f von der Klasse C^∞ ist, falls f von der Klasse C^k für alle k ist. Mathematisch:

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Man kann zeigen, dass

$$f \in C^1(\Omega) \implies f \in C(\Omega), \quad \text{und}$$

$$f \in C^{k+1}(\Omega) \implies f \in C^k(\Omega)$$

gilt, sodass folgende Inklusionen gelten

$$C(\Omega) \supset C^1(\Omega) \supset C^2(\Omega) \supset \dots \supset C^\infty(\Omega).$$

4. Taylorentwicklung für Funktionen mehrerer Variablen

4.1 Funktionen zweier Variablen

Def. Wir haben schon die Taylorentwicklung für eine Funktion $f(x)$ von einer Variablen kennengelernt. In einer ähnlichen Art und Weise kann man die Taylorentwicklung um (x_0, y_0) einer Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen aufschreiben

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (\Delta x)^2 \Delta y \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x (\Delta y)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (\Delta y)^3 \right) + \dots \end{aligned}$$

wobei $\Delta x = (x - x_0)$, $\Delta y = (y - y_0)$ und alle Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) auszuwerten sind.

Bsp: Bestimme die Taylorentwicklung von $f(x, y) = ye^{xy}$ bis zur zweiten Ordnung im Punkt $(2, 3)$.

Wir berechnen dazu zuerst die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ und werten sie gleich aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 \cdot e^{xy} & \implies & \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 9e^6 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{xy} + xy e^{xy} & \implies & \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 7e^6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^3 e^{xy} & \implies & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 3) = 27e^6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 2ye^{xy} + xy^2 e^{xy} & \implies & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 3) = 24e^6 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2xe^{xy} + x^2 y e^{xy} & \implies & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 3) = 16e^6 \end{aligned}$$

Nun berechnen wir noch

$$f(2, 3) = 3e^6$$

Nun setzen wir alles zum Taylorpolynom zusammen

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^6 \left(\right. \\ &3 \\ &+ 9(x - 2) + 7(y - 3) \\ &+ \frac{1}{2} (27(x - 2)^2 + 48(x - 2)(y - 3) + 16(y - 3)^2 \\ &\left. \right) \end{aligned}$$

Bsp: Berechne die Taylorentwicklung von

$f(xy, y) = \cos(x) \cdot (1 - y^2)^{-1}$ bis zur vierten Ordnung um den Punkt $(0, 0)$.

Trick: Manchmal kann man relativ viel Zeit sparen, wenn man anstatt alle partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ zu bestimmen und auszuwerten, bekannte eindimensionale Taylorentwicklungen zur Hilfe nehmen. In diesem Fall könnten wir einfach $\cos(x)$ und die Funktion $1/(1 - y^2)$ separat entwickeln.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 4! + \dots, \quad \frac{1}{1 - y^2} = 1 - y^2 + y^4 + \dots$$

Die gesuchte Taylorentwicklung bestimmt man, indem man die einzelnen Taylorentwicklungen zusammen multipliziert

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \cos(x) \cdot \frac{1}{1 - y^2} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^4 4! + \dots \right) \cdot \left(1 - y^2 + y^4 + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + y^4 + \dots \end{aligned}$$

Bsp: Berechne die Taylorreihe von $f(x, y) = \cos(xy)$ um den Punkt $(0, 0)$.

Trick: Auch in diesem Fall kann man relativ viel Zeit sparen, wenn man anstatt alle partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ auszurechnen und auszuwerten, einfach die bekannte eindimensionale Taylorentwicklung zu Hilfe nimmt. In diesem Fall könnten wir einfach die Taylorreihe von $\cos(x)$ benutzen

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Die gesuchte Taylorreihe bestimmt man in dem man x durch xy ersetzt

$$f(x, y) = \cos(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} y^{2n}}{(2n)!}.$$

TODO Irgendwoher Abschätzung für Restterm nehmen!!! (nicht im Michaels Buch drin)

7. Extremwertaufgaben in mehreren Dimensionen

7.1 Extremwertaufgaben in \mathbb{R}^n ohne Nebenbedingungen

Gegeben: $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Ω offen (ohne Rand) und f von der Klasse C^2 .

Gesucht: ein Extremum der Funktion f in Ω .

Um ein Extremum zu finden, müssen wir einfach alle partiellen Ableitungen (nach den Koordinatenrichtungen) simultan gleich Null setzen. Denn das Verschwinden (=0) der partiellen Ableitungen

genügt, um zu sichern, dass die Richtungsableitung in jeder Richtung verschwindet. Wenn also nicht alle partiellen Ableitungen verschwinden sollten, würde es eine Richtung geben, in welcher f nicht flach ist, sondern ansteigend oder fallend: Wir würden keinen Extrempunkt haben.

Thm. (Notwendige Bedingung für Extrema in \mathbb{R}^n) Ist $x_0 \in \Omega$ ein lokaler Extrempunkt (Maximum/Minimum) von f , so gilt

$$df(x_0) = 0$$

d.h. x_0 ist ein kritischer Punkt von f .

Kritische Punkte von f sind also die Kandidaten für Extrempunkte. Allerdings muss es sich bei diesen Kandidaten nicht unbedingt um Extrempunkte handeln, denn genauso wie im eindimensionalen Fall kann es Sattelpunkte geben. Ein Sattelpunkt ist ein Punkt, der weder ein Maximum noch ein Minimum ist. Für die Überprüfung der Kandidaten steht folgendes Kriterium zur Verfügung:

Thm. Es sei f wie oben. Ist $df(x_0) = 0$ und ist die Hesse-Matrix $\text{Hess}(f)(x_0)$ positiv resp. negativ definit im Sinne, dass

$$x^\top \text{Hess}(f)(x_0)x > 0 \text{ resp. } < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$$

so ist x_0 ein striktes lokales Minimum resp. Maximum von f .

7.1.1 Exkurs: positiv und negativ definite Matrizen

Def. Eine symmetrische, reelle $n \times n$ -Matrix A ist

- *positiv definit* : $\Leftrightarrow x^\top Ax > 0, \quad \forall x \neq 0$
- *positiv semi-definit* : $\Leftrightarrow x^\top Ax \geq 0, \quad \forall x \neq 0$
- *negativ definit* : $\Leftrightarrow x^\top Ax < 0, \quad \forall x \neq 0$
- *negativ semi-def.* : $\Leftrightarrow x^\top Ax \leq 0, \quad \forall x \neq 0$

Trifft keiner dieser Fälle zu, so heisst A *indefinit*.

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten eine vorgegebene Matrix auf ihre Definitheit zu überprüfen: das Eigenwert- und das Hurwitz-Kriterium.

Thm. (Eigenwert-Kriterium) Jede reelle symmetrische Matrix ist immer diagonalisierbar und die Eigenwerte sind immer reell. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte der reellen symmetrischen $n \times n$ -Matrix A . Dann gilt

- $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow A$ *positiv definit*
- $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0 \Leftrightarrow A$ *positiv semi-definit*
- $\lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow A$ *negativ definit*

- $\lambda_1 \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0 \Leftrightarrow A$ *negativ semi-definit*
- hat A sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist A *indefinit*.

Für grosse Matrizen kann die Diagonalisierung sehr aufwendig werden, weshalb man oft das *Hurwitz-Kriterium* benutzt. Dazu muss man zuerst die *Hauptminoren* definieren:

Def. Sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$ -Matrix. Die Hauptminoren A_1, A_2, \dots, A_n der Matrix A sind die Determinanten der Teilmatrizen der Grössen $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, n \times n$, welche man ausgehend von der linken oberen Ecke bildet.

Es gilt dann das folgende Kriterium

Thm. (Hurwitz-Kriterium) Seien A_1, \dots, A_n die Hauptminoren der reellen, symmetrischen $n \times n$ -Matrix A . Dann gilt

- a) $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, \dots, A_n > 0 \Leftrightarrow A$ *positiv definit*
- b) $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots, A_n > 0 \Leftrightarrow A$ *negativ definit*
- c) gilt weder a) noch b), so ist A *indefinit*.

Achtung: Bei b) *alterniert* das Vorzeichen der Hauptminoren, beginnend mit einem negativen Vorzeichen!

Vorgehen:

Gegeben: Sei $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit Ω offen (ohne Rand) und f von der Klasse C^2 .

Gesucht: Extrema der Funktion f in Ω .

1. Finde kritische Punkte von f , d.h. löse

$$df = 0.$$

Die Lösungen sind die Kandidaten für Extremalstellen von f .

2. Für jeden kritischen Punkt x_0 : Um zu entscheiden ob x_0 ein Minimum oder Maximum ist, muss man die Hesse-Matrix von f untersuchen

$\text{Hess}(f)(x_0)$ pos. def. $\Rightarrow x_0$ lokales Min. von f

$\text{Hess}(f)(x_0)$ neg. def. $\Rightarrow x_0$ lokales Max. von f

$\text{Hess}(f)(x_0)$ indef. $\Rightarrow x_0$ Sattelpunkt von f

Teil VII

Integralrechnung im \mathbb{R}^n

11. Integration auf Quadern und der Satz von Fubini

11.1 Integration auf Quadern in \mathbb{R}^n

Def. Ein *Quader* in \mathbb{R}^2 ist nichts anderes als ein Produkt von zwei (offenen, abgeschlossenen oder halboffenen) Intervallen, also ein Rechteck.

Bem: Da eine aus einem einzelnen Punkt bestehende Menge $\{a\}$ eine Nullmenge ist, also Mass Null hat, macht es keinen Unterschied, ob die Intervalle offen, abgeschlossen oder halb-offen sind: Der Elementarinhalt (resp. das Integral) ergibt dasselbe Resultat!

Def. Der *Elementarinhalt* eines Quaders lässt sich auf die natürlichste Art und Weise Erklären. Für $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ (Produkt von zwei Intervallen) ist

$$\mu(Q) = \int_Q d\mu(x, y) =: (b_2 - a_2) \cdot (b_1 - a_1).$$

Thm. (Satz von Fubini in \mathbb{R}^2) Es seien der Quader $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in C^0(\bar{Q})$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_Q f(x, y) d\mu(x, y) &= \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy f(x, y) \\ &= \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} dx f(x, y) \end{aligned}$$

Bem: \bar{Q} bedeutet er Abschluss von Q (also der Inhalt und der Rand von Q)

Bem: $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ ist eine offene Menge, der Rand ist $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$

Bem: Aus Symmetriegründen können wir können wir die Reihenfolge der Integration auch ändern. Wichtig bei diesen hintereinander geschachtelten Integralen über die Quader ist, dass man jeweils nur über eine Variable integriert, so ändert sich das Endresultat nicht.

11.2 Integration auf Quadern in \mathbb{R}^n

Def. Im Allgemeinen ist ein *Quader* $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Produkt

$$Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \prod_{j=1}^n I_j$$

von n Intervallen $I_j = [a_j, b_j], a_j < b_j, j = 1, \dots, n$.

Bem: Natürlich müssen die einzelnen Intervalle nicht notwendigerweise abgeschlossen sein. Im Gegenteil, sie dürfen offen, abgeschlossen oder halb-offen sein.

Def. Der *Elementarinhalt* des Quaders Q ist gegeben durch

$$\mu(Q) = \int_Q d\mu(x) =: \prod_j |I_j|$$

wobei $|I_j| = b_j - a_j$ die Länge des Intervalls I_j ist.

Die mehrdimensionale Version des Satzes von Fubini lautet dann

Thm. (Satz von Fubini in \mathbb{R}^n) Es seien der Quader $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in C^0(\bar{Q})$ gegeben. Dann gilt

$$\int_Q f(x) d\mu(x) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bem: Natürlich spielt die Reihenfolge der Integration keine Rolle. Wichtig dabei ist, dass bei den n hintereinander geschachtelten Integralen jeweils nur die zugehörige Variable integriert wird und alle anderen als Konstanten betrachtet werden.

Trick: (Integral faktorisieren) Ist ein Integrand das Produkt von Termen, die jeweils nur von einer Variablen abhängen, dann kann das Integral als Produkt von eindimensionalen Integralen geschrieben werden.

Bsp:

$$\int_{[0,1]^3} xy^2z d\mu(x, y, z) = \left(\int_0^1 x dx \right) \cdot \left(\int_0^1 y^2 dy \right) \cdot \left(\int_0^1 z dz \right)$$

Bem: So kann man schnell einen Term vom Integranden herausfaktorisieren und eventuell schon das gesamte Integral bestimmen, falls der Integrationsbereich 0 ergibt.

12. Integration auf Normalbereichen

Meistens sind die Bereiche, auf denen man integrieren will, komplizierter als ein Quader. Eine der grössten Schwierigkeiten der Integration im \mathbb{R}^n ist nicht die praktische Berechnung der Integrale selbst, sondern die geeignete Parametrisierung des Gebietes zu finden.

12.1 Normalbereiche in \mathbb{R}^2

Im folgenden sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

Def. Ω heisst ein y -Normalbereich, falls sich Ω wie folgt darstellen lässt,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

wobei f, g zwei stetige Funktionen der Variablen x sind. Mit anderen Worten: Ω ist ein y -Normalbereich, falls zwei Zahlen a, b und zwei stetige Funktionen f, g existieren, sodass x zwischen a und b liegt und, für fixes x , die Variable y zwischen $f(x)$ und $g(x)$ liegt.

Bem: Weil die aus einem Punkt bestehende Menge eine Nullmenge ist, spielt es keine Rolle ob " $<$ " oder " \leq " in der Definition vorkommt.

Eine Menge Ω als Normalbereich schreiben zu können, ist im Rahmen der Integrationsrechnung im \mathbb{R}^n sehr wichtig, denn es gibt eine sehr einfache Formel für Integrale auf Normalbereichen:

Thm. (Integration auf Normalbereichen (\mathbb{R}^2)) Sei

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

mit stetigen Funktionen f, g und sei $F \in C^0(\bar{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} F d\mu = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy F(x, y).$$

Das Integral wird von innen nach aussen ausgewertet, d.h. zuerst das innere und dann das äussere Integral.

Bem: Der Satz ist sozusagen eine Verallgemeinerung des Satzes von Fubini für den Fall, dass Ω kein Quader, sondern ein Normalbereich ist.

Bem: Natürlich gilt der Satz auch für x -Normalbereiche. In diesem Fall muss man nur die Rolle von x und y vertauschen.

Bem: Das Integral wird immer von innen nach aussen ausgewertet, d.h. zuerst wird das x - und dann das y -Integral bestimmt. Die Reihenfolge der Integration spielt in diesem Fall natürlich eine Rolle, denn die inneren Grenzen sind ja Funktionen von x (resp. y)!

12.2 Normalbereiche in \mathbb{R}^n

Genauso wie in \mathbb{R}^2 kann man Normalbereiche in \mathbb{R}^n definieren.

Def. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst *Normalbereich*, falls sich Ω folgendermassen darstellen lässt

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_1 \leq b,$$

$$f_1(x_1) \leq x_2 \leq g_1(x_1)$$

$$f_2(x_1, x_2) \leq x_3 \leq g_2(x_1, x_2)$$

\vdots

$$f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$$

mit stetigen Funktionen f_i, g_i .

Thm. Für solche Bereiche gilt die Formel

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_a^b dx_1 \int_{f_1(x_1)}^{g_1(x_1)} dx_2 \cdots \int_{f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})} dx_n f(x, y) = \Phi(u, v),$$

12.3 Der Skalierungstrick

Der *Skalierungstrick* ist eine sehr einfache aber hilfreiche Methode, welche es uns erlaubt, Volumina von n -dimensionalen Gebieten zu bestimmen.

Thm. (Skalierungstrick) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar (d.h. $\mu(\Omega)$ ist definiert). Die Menge Ω_a , welche man durch die Skalierung von Ω um einen Faktor $a > 0$ bekommt, ist auch messbar und es gilt

$$\mu(\Omega_a) = a^n \mu(\Omega).$$

13. Die Substitutionsregel

Neben Normalbereichen bietet die Substitutionsregel ein anderes wichtiges Hilfsmittel für die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen an, denn eine geschickte Wahl eines dem Problem angepassten Koordinatensystems ist für die Berechnung mehrdimensionaler Integralen von fundamentaler Wichtigkeit.

13.1 Die Substitutionsregel in \mathbb{R}^2

Für die Berechnung von Integralen in einer Variablen ist die Substitutionsregel natürlich ein wichtiges Instrument. Will man zum Beispiel das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

berechnen, so führt die Substitution (g ist ein Diffeomorphismus)

$$x = g(u) \implies dx = g'(u) du$$

zu dem Integral

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u) du.$$

Mit anderen Worten: Das Integrationselement dx wird durch $g'(u) du$ in der neuen Variablen ersetzt.

Bem: Ein Diffeomorphismus ist eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.

In zwei Dimensionen gelten analoge Überlegungen. Wir betrachten eine Funktion $f(x, y)$, welche auf dem Gebiet Ω Riemann-integrabel ist. Wir betrachten auch die Substitution

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v)$$

oder kompakt geschrieben

$$\Phi: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u, v) \\ h(u, v) \end{pmatrix},$$

wobei Φ ein C^1 -Diffeomorphismus sein soll. Unter dieser Koordinatentransformation transformiert sich auch das Integrationsgebiet gemäss $\bar{\Omega} = \Phi^{-1}(\Omega)$. $\bar{\Omega}$ ist also das neue Integrationsgebiet in den Koordinaten u, v . Der Transformationsatz in \mathbb{R}^2 lautet dann

Thm. (Substitutionsregel in \mathbb{R}^2)

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\bar{\Omega}} f(g(u, v), h(u, v)) |\det d\Phi| du dv$$

Hier ist

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$$

die sogenannte *Funktionalmatrix* oder Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation Φ . Bei der Substitution $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ wird also das Flächenelement $dx dy$ durch das Flächenelement im (u, v) -Koordinatensystem

$$dx dy = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix} \right| du dv$$

ersetzt.

Bsp: Integriere die Funktion (das Skalarfeld)

$$f(x, y) = x^{\frac{3}{2}}$$

über den folgenden Bereich

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \wedge \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{y} \right\}$$

mit Hilfe der Substitution $u = x$, und $v = xy$.

Zuerst bilden wir Φ und Φ^{-1} :

$$\Phi: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \implies \Phi^{-1}: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann bilden wir $\bar{\Omega} := \Phi^{-1}(\Omega)$

$$\bar{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2 \wedge 1 \leq v \leq 2\}.$$

Dann bilden wir $d\Phi$:

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix}.$$

Dann bilden wir $|\det d\Phi|$ um den Faktor für das Flächenelement im neuen Koordinatensystem zu erhalten:

$$|\det d\Phi| = \left| -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{u} \right| = \left| \frac{1}{u} \right|.$$

Jetzt können wir nach der Substitutionsregel das

Integral in den neuen Koordinaten ausrechnen

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\mu(x, y) = \int_{\Phi^{-1}(\Omega) = \bar{\Omega}} f(\Phi(x, y)) |\det d\Phi| d\mu(x, y)$$

$$\int_{\bar{\Omega}} u^{\frac{3}{2}} \frac{v}{u} \left| \frac{1}{u} \right| d\mu(u, v) = \int_1^2 \int_1^2 u^{-\frac{1}{2}} v du dv$$

$$= \int_1^2 v dv \cdot \int_1^2 u^{-\frac{1}{2}} du = \dots = 3(\sqrt{2} - 1).$$

Womit wir das Volumen unter dem Skalarfeld $f(x, y)$ über Ω ausgerechnet haben, einfach in anderen Koordinaten mit der Koordinatentransformation Φ .

13.2 Die Substitutionsregel in \mathbb{R}^n

Wir betrachten eine Riemann-integrierbare Funktion f auf dem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und die Koordinatentransformation

$$(x_1, \dots, x_n) = \Phi(u_1, \dots, u_n)$$

oder in Komponenten

$$x_1 = g_1(u_1, \dots, u_n), \quad \dots \quad x_n = g_n(u_1, \dots, u_n).$$

oder ausführlicher

$$\Phi: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(u_1, \dots, u_n) \\ g_2(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ g_n(u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix}$$

Wir nehmen an, dass die Abbildung Φ ein C^1 -Diffeomorphismus ist, also eine in beiden Richtungen stetig-differenzierbare Abbildung. Das Integrationsgebiet $\bar{\Omega}$ ist das Bild eines Gebietes $\bar{\Omega} = \Phi^{-1}(\Omega)$ im (u_1, \dots, u_n) -Koordinatensystem. Der Substitutionsatz sagt dann

Thm. (Substitutionsregel in \mathbb{R}^n)

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_{\bar{\Omega}} f(g_1(u), \dots, g_n(u)) |\det d\Phi| du_1 \cdots du_n.$$

Dabei ist

$$dx_1 \cdots dx_n = |\det d\Phi| du_1 \cdots du_n$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \right| du_1 \cdots du_n$$

das Volumenelement im (u_1, \dots, u_n) -Koordinatensystem.

13.3 Wichtige Koordinatentransformationen

13.3.1 Koordinatentransformationen in \mathbb{R}^2

Polarkoordinaten		
Definition	Max. Definitionsbereich	Volumenelement
$x = r \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dxdy = r dr d\varphi$
$y = r \sin \varphi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	
Elliptische Koordinaten		
Definition	Max. Definitionsbereich	Volumenelement
$x = ra \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dxdy = rabdrd\varphi$
$y = rb \sin \varphi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	

13.3.1 Koordinatentransformationen in \mathbb{R}^3

Kugelkoordinaten		
Definition	Max. Def.-Bereich	Volumenelement
$x = r \sin \theta \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dxdydz = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$
$y = r \sin \theta \sin \varphi$	$0 \leq \theta \leq \pi$	
$z = r \cos \theta$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	
Zylinderkoordinaten		
Definition	Max. Definitionsbereich	Volumenelement
$x = ra \cos \varphi$	$0 \leq r < \infty$	$dxdydz = r dr d\varphi dz$
$y = rb \sin \varphi$	$0 \leq \varphi < 2\pi$	
$z = z$	$-\infty < z < \infty$	

Teil VIII Vektoranalysis

16. Grundbegriffe der Vektoranalysis

16.2 Differentialoperatoren

Natürlich kennt die Vektoranalysis sowohl vektorielle als auch skalare Operatoren. Diese Operatoren werden auf Skalar- oder Vektorfelder angewandt, sodass neue Skalar- oder Vektorfelder resultieren.

16.2.1 Der Gradient

Def. Ist $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld, so definiert man den *Gradienten* von f als

$$\text{grad}(f) := \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Bem: ∇ ist ein Vektoroperator. Der Vorteil der ∇ -Notation, ist, dass man damit genauso wie mit normalen Vektoren rechnen kann (Produktregel).

16.2.4 Richtungsableitung

Def. Gegeben sei das stetig differenzierbare Skalarfeld $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Einheitsvektor \vec{e} . Der Ausdruck

$$D_{\vec{e}}f(x_0) := \vec{e} \cdot \nabla f(x_0)$$

heißt *Richtungsableitung* von f im Punkt x_0 in Richtung \vec{e} .

Bem: Die Richtungsableitung hat die folgende anschauliche Interpretation: $D_{\vec{e}}f(x_0)$ misst die Änderung von f im Punkt x_0 in Richtung \vec{e} .

Bsp: Man bestimme \vec{e} derart, dass $D_{\vec{e}}f(x_0)$ maximal ist.

Dazu benutzen wir die Definition des Skalarproduktes

$$D_{\vec{e}}f(x_0) = \vec{e} \cdot \nabla f(x_0) = \underbrace{\|\vec{e}\|}_{=1} \cdot \|\nabla f(x_0)\| \cdot \cos \theta$$

wobei θ den Winkel zwischen \vec{e} und $\nabla f(x_0)$ bezeichnet. Es gilt somit

$$D_{\vec{e}}f(x_0) \text{ maximal} \iff \theta = 0, \pi \iff \vec{e} \parallel \nabla f(x_0)$$

TODO: Falls $\nabla f(x_0) \neq 0$???. Implikationen nochmals anschauen.

Dies bedeutet, dass $D_{\vec{e}}f(x_0)$ maximal ist, falls \vec{e} parallel zum Gradienten im Punkte x_0 steht. Da $D_{\vec{e}}f(x_0)$ die Änderung der Funktion f in Richtung \vec{e} misst, lernen wir einen wichtigen Fakt: Der Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Zuwachsrate von f und seine Länge ist gleich der maximalen Änderung von f .

16.2.3 Divergenz

Def. Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{v}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1 mit Komponenten v_1, v_2, \dots, v_n . Die *Divergenz* von \vec{v} ist definiert als

$$\text{div}(\vec{v}) := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

Ist die Divergenz eines Vektorfeldes ist somit ein Skalarfeld. Physikalisch misst die Divergenz die Quellenstärke des Vektorfeldes. Ein Vektorfeld \vec{v} mit der Eigenschaft, dass $\text{div} \vec{v} = 0$ ist, heißt somit *quellenfrei* (oder *divergenzfrei*).

In kompakter Form kann man die Divergenz von \vec{v} auch mithilfe des ∇ -Operators als formales Skalarprodukt ausdrücken

$$\text{div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

16.2.4 Rotation

Def. Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ von der Klasse C^1 mit Komponenten v_1, v_2 und v_3 . Die

Rotation von \vec{v} ist definiert durch

$$\text{rot}(\vec{v}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die Rotation eines Vektorfeldes ist somit ein Vektorfeld, also eine Abbildung $\text{rot}(\vec{v}): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Physikalisch misst die Rotation die *Wirbelstärke* des Vektorfeldes. Ein Vektorfeld \vec{v} , welches $\text{rot}(\vec{v}) = (0, 0, 0)$ erfüllt, nennt man *wirbelfrei*.

In kompakter Form kann man die Rotation von \vec{v} mithilfe des ∇ -Operators als "Kreuzprodukt" von ∇ mit \vec{v} formulieren.

$$\text{rot}(\vec{v}) := \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Beachte, dass die Rotation in dieser Form nur für dreidimensionale Vektorfelder sinnvoll ist (im Gegensatz zur Divergenz zum Beispiel, welche für beliebige Vektorfelder $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert ist). Man kann aber die Rotation auch im zweidimensionalen Fall definieren. Für $\vec{v} = (v_1, v_2)$ setzen wir (siehe Satz von Green)

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

Die folgende Formel suggeriert auch, wie man die Rotation im zweidimensionalen Fall definieren kann.

$$\text{rot}(\vec{v}) := \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

16.2.5 Laplace-Operator

Def. Gegeben sei ein Skalarfeld $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der Klasse C^2 . Der *Laplace-Operator* Δ wirkt auf f wie folgt

$$\Delta f := \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_n^2}$$

Eine Funktion für welche $\Delta f = 0$ gilt nennt man *harmonisch*.

16.3 Rechenregeln für Differentialoperatoren

Thm. Es seien f, g, \vec{v}, \vec{w} zweimal stetig differenzierbare Skalar- bzw. Vektorfelder. Dann gelten folgende Rechenregeln

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

$$\text{div}(\vec{v} + \vec{w}) = \text{div}(\vec{v}) + \text{div}(\vec{w})$$

$$\text{rot}(\vec{v} + \vec{w}) = \text{rot}(\vec{v}) + \text{rot}(\vec{w})$$

$$\text{div}(f\vec{v}) = (\text{grad}(f)) \cdot \vec{v} + f \text{div}(\vec{v})$$

$$\text{rot}(f\vec{v}) = \text{grad}(f) \times \vec{v} + f \text{rot}(\vec{v})$$

$$\text{div}(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot \text{rot}(\vec{v}) - \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{w})$$

$$\text{rot}(\vec{v} \times \vec{w}) = \text{div}(\vec{w})\vec{v} - \text{div}(\vec{v})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w}$$

$$\nabla(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{w} + \vec{w} \times \text{rot}(\vec{v}) + \vec{v} \times \text{rot}(\vec{w})$$

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \Delta f$$

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$$

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{v})) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) - \Delta \vec{v}$$

18. Wegintegrale

18.1 Definition und erste Beispiele

18.1.1 Definition

Def. Es seien $\vec{v}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $\vec{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Der Ausdruck

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \vec{\gamma}'(t) dt$$

wird *Wegintegral* (oder *Kurvenintegral*) von \vec{v} längs $\vec{\gamma}$ genannt.

Falls γ eine geschlossene Kurve ist (d.h. $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$), so notiert man oft

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

anstatt $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

Bem: Das Wegintegral besitzt folgende physikalische Bedeutung: $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ ist die Arbeit, welche längs γ unter der Wirkung von \vec{v} geleistet wird. \vec{s} ist ein Ortsvektor, sowohl als auch $\vec{\gamma}$, und somit ist $\vec{\gamma}'$ ein Geschwindigkeitsvektor.

Thm. $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ ist von der gewählten Parametrisierung unabhängig. Etwas genauer: Das Wegintegral $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ ist invariant bezüglich orientierungserhaltenden Parameterwechseln, während es sein Vorzeichen bei orientierungsumkehrenden Parameterwechseln wechselt. Wir erinnern dabei daran, dass ein Parameterwechsel

$$\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d], t \mapsto s = \varphi(t)$$

orientierungserhaltend heißt, falls $\varphi(a) = \gamma(c)$ und $\varphi(b) = \gamma(d)$, während man *orientierungsumkehrend* sagt, falls $\varphi(a) = \gamma(d)$ und $\varphi(b) = \gamma(c)$.

Bei einem orientierungsumkehrenden Parameter wird die neue Kurve in der umgekehrten Richtung zur ursprünglichen Kurve durchlaufen, sodass das Wegintegral $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ sein Vorzeichen wechselt

Thm. Wir wissen bereits, dass Kurven auch summiert werden können. Für die Summenkurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ gilt

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Allgemeiner gesagt, muss die Kurve γ nicht unbedingt differenzierbar sein. Denn es genügt, dass γ stückweise der Klasse C^1 angehört. Was bedeutet das? Eine Kurve $\vec{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst *stückweise stetig differenzierbar*, falls $\vec{\gamma}$ bis auf endlich viele Stellen t_0, t_1, \dots, t_k stetig differenzierbar ist. Es sind also "Knicke" erlaubt. In diesem Fall gilt einfach

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=0}^k \int_{\gamma_i} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Notiert wird $\vec{\gamma} \in C_{pw}^1$ (pw = piece-wise = stückweise).

Folgende Wegintegrale kommen oft in Rechnungen vor

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^3 t \, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t \, dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$$

Bem: Oft lassen sich andere Formeln in die obigen umwandeln

$$\sin^2 t \cos^2 t = \sin^2 t (1 - \sin^2 t) = \sin^2 t - \sin^4 t$$

Bem: Oft lassen sich Produkte von Potenzen von sin und cos mit Substitution lösen

$$\int \sin t \cos^3 t \, dt = \frac{-\cos^4 t}{4} + C$$

18.2 Potenzialfelder

In gewissen Fällen kann man die Berechnung von Wegintegralen etwas vereinfachen. Dies geschieht immer, wenn wir sogenannte Potenzialfelder haben. Sei \vec{v} das Vektorfeld, in dem wir ein Wegintegral entlang γ zu bestimmen haben. Es gibt Situationen, in denen das Wegintegral $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ *wegunabhängig* sein kann. d.h. nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ abhängt und nicht von der exakten Form von γ . Dadurch kann man den komplizierten Weg durch einen

einfacheren Weg ersetzen, der denselben Anfangs- und Endpunkt hat: Das Resultat des Wegintegrals ist das gleiche! Es gibt zwei Möglichkeiten, diese Eigenschaft auszunutzen, um das Wegintegral zu vereinfachen:

- Falls der Definitionsbereich Ω des Vektorfeldes $\vec{v}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine einfach zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n (vgl. 5.5) ist und auf Ω für $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ gilt, so ist \vec{v} *konservativ*. Das bedeutet, dass das Wegintegral $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ *wegunabhängig* ist.
- Alternativ kann man das Problem mithilfe von Potenzialen lösen. Ein *Potential* von \vec{v} auf Ω ist eine stetig differenzierbare Funktion Φ für welche $\text{grad } \Phi = \vec{v}$ auf Ω erfüllt. Besitzt \vec{v} ein Potential, so ist das Wegintegral $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ *wegunabhängig*.

18.2.2 Potenzialfelder und Potenziale

Def. ein Vektorfeld $\vec{v}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst *Potentialfeld*, falls es eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt (ein Skalarfeld), für welche

$$\nabla \Phi = \vec{v}$$

gilt. Die Abbildung Φ heisst *Potential* von \vec{v} . Das Potential eines Vektorfeldes (falls existent) ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Denn falls Φ ein Potential von \vec{v} ist, so ist auch $\Phi + C$ ein Potential von \vec{v} .

Leider ist es nicht immer möglich ein Potential für ein gegebenes \vec{v} zu finden. Es gibt gewisse Bedingungen, die ein Vektorfeld \vec{v} erfüllen muss, um ein Potentialfeld zu sein. Diese Bedingungen werden *Integrabilitätsbedingungen* genannt und lauten so:

Thm. (Integrabilitätsbedingungen für Potenzialfelder) Es sei das stetig differenzierbare Vektorfeld $\vec{v}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, welches auf Ω definiert ist. Ist \vec{v} ein Potentialfeld, so gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Ist Ω einfach zusammenhängend, so sind die Integrabilitätsbedingungen auch hinreichend, d.h.

\vec{v} Potentialfeld \iff Integrabilitätsbedingungen erfüllt

Bem: im zweidimensionalen und dreidimensionalen Fall $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bzw. $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind die Integrabilitätsbedingungen äquivalent zur Bedingung $\text{rot}(\vec{v}) = 0$.

18.2.3 Konservative Vektorfelder

Ein Vektorfeld $\vec{v}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst *konservativ*, falls für je zwei Kurven γ_1 und γ_2 , welche im Defi-

nitionsbereich Ω von \vec{v} enthalten sind und dieselben Anfangs- und Endpunkte haben, gilt

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

In anderen Worten: Das Wegintegral über Kurven in Ω hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Diese Aussage ist äquivalent zu: Für alle geschlossenen Kurven γ , welche ganz in Ω enthalten sind, gilt

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Potentialfelder sind offenbar konservativ. Denn falls $\nabla \Phi = \vec{v}$ auf Ω gilt, so ist das Wegintegral von \vec{v} längs einer beliebigen Kurve γ in Ω durch die Formel

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \Phi(\text{Ende}) - \Phi(\text{Anfang})$$

gegeben. Das Wegintegral hängt somit nur vom Anfangs- und Endpunkt ab. \vec{v} ist somit konservativ.

Gilt auch die Umkehrung? D.h. besitzen konservative Vektorfelder immer ein Potential? Die Antwort auf diese Frage ist ja! Denn es gilt folgender Satz

Thm. (Konservative Felder sind Potenzialfelder) Es sei das Vektorfeld $\vec{v}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann ist \vec{v} genau dann konservativ, wenn eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\nabla \Phi = \vec{v}$.

\vec{v} besitzt ein Potential \iff \vec{v} ist konservativ

Bem: Der Satz besagt also, dass Potenzialfelder und konservative Vektorfelder das gleiche sind!

18.2.4 Zusammenfassung

Sei $\vec{v}: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit *einfach zusammenhängendem* Definitionsbereich Ω . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- \vec{v} erfüllt die Integrabilitätsbedingungen auf Ω (d.h. im Speziellen $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ für $n = 2, 3$).
- \vec{v} ist Potentialfeld (d.h. $\exists \Phi: \nabla \Phi = \vec{v}$).
- \vec{v} ist konservativ.
- $\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$ für alle geschlossene Kurven γ in Ω .
- Das Wegintegral $\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ ist *wegunabhängig*.

Wichtig: Wenn mit den Integrabilitätsbedingungen argumentiert wird, muss Ω immer zusammenhängend sein! Z.B. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ ist nicht zusammenhängend, da es ein Loch gibt.

Wichtig: Sollte der Definitionsbereich von \vec{v} nicht zusammenhängend sein, aber \vec{v} erfüllt die Integrabi-

litätsbedingungen, dann muss man darauf schauen, dass das Bild $\text{Im}(\vec{\gamma}(D))$, wobei $\gamma: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, eine Teilmenge einer einfach zusammenhängenden Teilmenge des Definitionsbereiches von \vec{v} ist.

20. Der Satz von Green in der Ebene

Der Satz von Green erlaubt es zweidimensionale Wegintegrale auf eine einfachere Art zu berechnen, indem man zweidimensionale Gebietsintegrale (siehe Integration auf Quadern und Satz von Fubini, Integration auf Normalenbereichen) ausrechnet.

Thm. Es seien ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ und $C \subseteq \Omega$ ein beschränkter Bereich mit einem C_{pw}^1 Rand ∂C . Dann gilt

$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \underbrace{\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)}_{\text{rot}(\vec{v})} dx \, dy$$

Bem: Der Satz von Green ist also die zweidimensionale Version des Satzes von Stokes.

Bem: Auch hier wird der Rand ∂C im positiven mathematischen Sinn umlaufen, d.h. so, dass das Gebiet C immer links steht (siehe Figur).

D.h. wenn man in der Ebene entlang von γ läuft, muss das Gebiet immer auf der Linken Seite sein.

Trick: Sollte die Kurve *nicht im mathematisch positiven Sinne* verlaufen, kann man sie trotzdem benutzen, und rechnet dementsprechend

$$\int_{\partial \Omega} \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \int_{\Omega} \text{rot}(\vec{v}) \, d\mu.$$

Wichtig: Durch den Satz von Green lassen sich komplizierte Wegintegrale ganz schnell berechnen, wenn man z.B. sieht, dass $\text{rot}(\vec{v}) = 0$ ist. Daraus kann man schliessen, dass das Wegintegral 0 sein muss, womit man es gar nicht mehr kompliziert über die parametrisierten Teilwegintegrale ausrechnen muss.

Wichtig: Ist $\text{rot}(\vec{v}) = c$ konstant, und kennt man den Flächeninhalt $\mu(\Omega)$ von Ω , so kann das Oberflächenintegral einfach so ausrechnen:

$$\int_{\Omega} \text{rot}(\vec{v}) \, dx \, dy \stackrel{\text{rot}(\vec{v}) = \text{konst.}}{=} \int_{\Omega} c \, dx \, dy = \mu(\Omega) \cdot c$$

D.h. man multipliziert einfach die Konstante c mit dem Flächeninhalt $\mu(\Omega)$.

20.2.1 Berechnung von Flächeninhalten mit dem Satz von Green

Der Satz von Green erlaubt es, nicht nur Wegintegrale als Flächenintegrale zu bestimmen. Man kann zum Beispiel auch den Flächeninhalt eines zweidimensionalen Gebietes mithilfe von Wegintegralen über den Satz von Green bestimmen. Dies geht wie folgt. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = (0, x) \quad (\text{oder auch: } \vec{v}(x, y) = (-y, 0))$$

welches jedem Punkt (x, y) den Vektor $(0, x)$ zuordnet. Die Rotation von \vec{v} kann man sehr leicht bestimmen

$$\text{rot}(\vec{v}) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 1 - 0 = 1$$

Wenden wir nun den Satz von Green auf einem beschränkten Gebiet $C \subseteq \mathbb{R}^2$ mit C^1_{pw} -Rand ∂C an, so können wir die Fläche von C , d.h. $\mu(C)$ ganz einfach ausrechnen:

$$\int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_C \text{rot}(\vec{v}) \, d\mu(x, y) = \int_C 1 \, d\mu(x, y) = \mu(C)$$

Wir haben also gezeigt, dass das Wegintegral von einem \vec{v} mit $\text{rot}(\vec{v}) = 1$ entlang des Randes von C gleich dem Flächeninhalt von C ist. Das ist eine sehr nützliche Formel für die Berechnung von $\mu(C)$.

Bem: D.h. Wichtig ist nur, dass $\text{rot}(\vec{v}) = 1$ ist, egal welches \vec{v} wir nehmen, dass diese Bedingung erfüllt erfüllt.

Kochrezept: Berechnung von $\mu(C)$ mit dem Satz von Green

Gegeben: Gebiet $C \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt mit C^1_{pw} -Rand ∂C .

Gesucht: Fläche des Gebietes, d.h. $\mu(C)$.

- 1) Parametrisiere den Rand von C mit der Kurve

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t)$$

Beachte dabei, dass die Parametrisierung in mathematisch positiver Richtung verläuft (d.h. so dass die Menge C immer links steht).

- 2) Berechne γ' (Komponenten nach t ableiten)
- 3) Wende die Formel

$$\mu(C) = \int_{\gamma=\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) \, dt$$

an, mit einem Vektorfeld \vec{v} , das $\text{rot}(\vec{v}) = 1$ erfüllt. Z.B.:

$$\vec{v}(x, y) = (0, x), \quad \vec{v}(x, y) = (-y, 0),$$

$$\vec{v}(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x), \quad \dots$$

Andere Integrale

Fläche beschrieben durch Funktion in Polarkoordinaten von φ_1 bis φ_2

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 \, d\varphi$$

Länge einer ebenen Kurve, beschrieben durch $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Ableitung von Integralen

Allgemein gilt:

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

Trigonometrie

Kreisfläche: πr^2

Kreisumfang: $2\pi r$

Trigonometrische Identitäten

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Bsp:

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) &= \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \frac{1}{2} \sin(2\theta) \\ &= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4\theta) \right) \\ &= \frac{1}{8} (1 - \cos(4\theta)) \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen als Exponentialfunktionen

$$\sin(z) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \cos(z) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\tan(z) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

Mitternachtsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Komplexe Zahlen

$$z = x + iy \iff x = \text{Re } z, \quad y = \text{Im } z$$

$$z = x + iy \iff \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = |z| \\ \varphi = \arccos(x/r) \\ \varphi = \arcsin(y/r) \end{cases}$$

$$\bar{z} = x - iy \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} = r$$

Integraltyp	Substitution	Neues Integral bzw. Lösung	Beispiel
(A) $\int f(ax+b) \, dx$	$u = ax + b$ $dx = \frac{du}{a}$	$\frac{1}{a} \cdot \int f(u) \, du$	$\int \sqrt{4x+5} \, dx$ ($u = 4x + 5$)
(B) $\int f(x) \cdot f'(x) \, dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{2} [f(x)]^2 + C$	$\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ ($u = \sin x$)
(C) $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \, dx$ ($n \neq -1$)	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + C$	$\int (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$ ($u = \ln x$)
(D) $\int f[g(x)] \cdot g'(x) \, dx$	$u = g(x)$ $dx = \frac{du}{g'(x)}$	$\int f(u) \, du$	$\int x \cdot e^{x^2} \, dx$ ($u = x^2$)
(E) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$	$\ln f(x) + C$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1} \, dx$ ($u = x^2 - 3x + 1$)
(F) $\int R(x; \sqrt{a^2-x^2}) \, dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \cdot \sin u$ $dx = a \cdot \cos u \, du$ $\sqrt{a^2-x^2} = a \cdot \cos u$		$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$ ($x = 2 \cdot \sin u$)
(G) $\int R(x; \sqrt{x^2+a^2}) \, dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2+a^2}$	$x = a \cdot \sinh u$ $dx = a \cdot \cosh u \, du$ $\sqrt{x^2+a^2} = a \cdot \cosh u$		$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} \, dx$ ($x = 3 \cdot \sinh u$)
(H) $\int R(x; \sqrt{x^2-a^2}) \, dx$ R: Rationale Funktion von x und $\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a \cdot \cosh u$ $dx = a \cdot \sinh u \, du$ $\sqrt{x^2-a^2} = a \cdot \sinh u$		$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}} \, dx$ ($x = 5 \cdot \cosh u$)

Integraltyp	Substitution	Neues Integral bzw. Lösung	Beispiel
(I) $\int R(\sin x; \cos x) \, dx$ R: Rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$	$u = \tan(x/2)$ $dx = \frac{2}{1+u^2} \, du$ $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$		$\int \frac{1+\cos x}{\sin x} \, dx$
(J) $\int R(\sinh x; \cosh x) \, dx$ R: Rationale Funktion von $\sinh x$ und $\cosh x$	$u = e^x, \quad dx = \frac{du}{u}$ $\sinh x = \frac{u^2-1}{2u}$ $\cosh x = \frac{u^2+1}{2u}$		$\int \frac{\sinh x + 1}{\cosh x} \, dx$