Grafos de Fichas

Viviana Márquez

Konrad Lorenz Fundación Universitaria
Clase: Teoría de Grafos — Profesor: Albert Montenegro

Noviembre 1, 2017

IV Taller de Matemáticas Discretas

IV Taller de Matemáticas Discretas

Centro Académico Cultural
Campus Juriquilla de la UNAM
Querétaro, México.

IV Taller de Matemáticas Discretas

Centro de Innovación Matemática (CINNMA)
La Casa Amarilla
Querétaro, México.




Querétaro, México.

IV Taller de Matemáticas Discretas

- 5 proyectos de dónde escoger
- Una semana de trabajo
- Tres compañeros
- Un Ayudante
- Un Profesor

IV Taller de Matemáticas Discretas

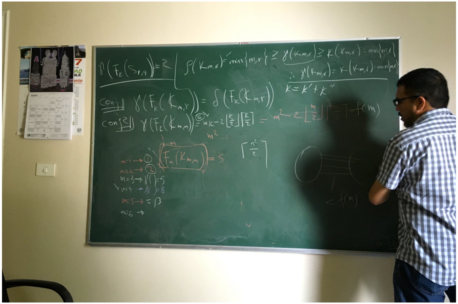
- 5 proyectos de dónde escoger
- Una semana de trabajo
- Tres compañeros
- Un Ayudante
- Un Profesor

2) Moviendo fichas sobre las aristas de una gráfica
Tutor: Jesús Leaños
Ayudante: Ana Laura Trujillo

Imagina que seleccionas un conjunto no vacío de vértices de una gráfica y que sobre cada uno de esos vértices pones una ficha. En seguida considera la siguiente regla de movimiento: una ficha determinada podrá cambiar de vértice sólo si su vértice actual es adyacente al nuevo vértice y este último no tiene ficha. El proyecto consiste en estudiar las propiedades combinatorias de las estructuras que resultan al aplicar repetidamente ese tipo de movimientos.

Grafos (Gráficas) de fichas

Proyecto: Grafos (Gráficas) de fichas



Profesor:	Jesús Leaños (Universidad Autónoma de Zacatecas)
Ayudante:	Ana Laura Trujillo Negrete
Estudiantes:	L. Adame, A. Martínez, E. Sánchez, V. Márquez.

Grafos (Gráficas) de fichas

Definición 1: Grafo

Un **grafo** es una tripleta ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$ que consiste en un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices, un conjunto $E(G)$ de aristas y una función de incidencia ψ_G que asocia a cada arista de G con un par no ordenado de elementos de $V(G)$. Por lo general se toma como $G = (V, E)$.

Grafos (Gráficas) de fichas

Definición (informal) 2: Grafo de fichas

Sea G un grafo simple y $k \in [n-1]$ el número de fichas.

Un grafo de fichas $F_k(G)$ corresponde a las configuraciones de k fichas ubicadas en distintos vértices de G, donde dos configuraciones son adyacentes siempre que una configuración puede ser alcanzada por otra al mover una ficha a través de una arista desde su posición actual a un vértice que esté libre.

EJEMPLO

Grafos (Gráficas) de fichas

Definición 2: Grafo de fichas

Sea G un grafo simple y $k \in [n-1]$ Un grafo de fichas $F_k(G)$ se define como el grafo cuyos vértices son todos los subconjuntos de vértices de G con exactamente k elementos y dos de ellos serán adyacentes siempre que su diferencia simétrica sea una arista de G.

Grafos (Gráficas) de fichas

Definición 2: Grafo de fichas

Sea G un grafo simple y $k \in [n-1]$ Un grafo de fichas $F_k(G)$ se define como el grafo cuyos vértices son todos los subconjuntos de vértices de G con exactamente k elementos y dos de ellos serán adyacentes siempre que su diferencia simétrica sea una arista de G.

Definición 3: Diferencia simétrica

La **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B es otro conjunto $A \Delta B$ cuyos elementos son todos los elementos de A o B, a excepción de los elementos comunes a ambos: $x \in A \Delta B$ sii $x \in A \veebar x \in B$.

EJEMPLO

Proyecto:
Identificar propiedades de las gráficas de fichas.

Propiedades básicas de los Grafos (Gráficas) de fichas

Vértices de $F_k(G)$

$$|V(F_k(G))| =$$

Propiedades básicas de los Grafos (Gráficas) de fichas

Vértices de $F_k(G)$

$$|V(F_k(G))| = \binom{|V(G)|}{k}$$

Aristas de $F_k(G)$

$$|E(F_k(G))| =$$

Propiedades básicas de los Grafos (Gráficas) de fichas

Aristas de $\mathrm{F}_k(G)$

$$|E(F_k(G))| = \binom{|V(G)| - 2}{k - 1} \cdot |E(G)|$$

Durante esa semana...

- Programar...

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.
- Prop. 4: $\lambda(F_k(K_n)) = k(n-k)$

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.
- Prop. 4: $\lambda(F_k(K_n)) = k(n-k)$
- Prop. 5: $\lambda(F_k(P_n)) = 1$

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.
- Prop. 4: $\lambda(F_k(K_n)) = k(n-k)$
- Prop. 5: $\lambda(F_k(P_n)) = 1$
- Prop. 6: $\lambda(F_k(C_n)) = 2$

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.
- Prop. 4: $\lambda(F_k(K_n)) = k(n-k)$
- Prop. 5: $\lambda(F_k(P_n)) = 1$
- Prop. 6: $\lambda(F_k(C_n)) = 2$
- Prop. 7: $\lambda(F_k(K_{1,n-1})) = k$

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.
- Prop. 4: $\lambda(F_k(K_n)) = k(n-k)$
- Prop. 5: $\lambda(F_k(P_n)) = 1$
- Prop. 6: $\lambda(F_k(C_n)) = 2$
- Prop. 7: $\lambda(F_k(K_{1,n-1})) = k$
- Prop. 8: $\lambda(F_k(K_{m,n})) \geq k(m-k+1)$, siempre que $n \geq m \geq k$

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.
- Prop. 4: $\lambda(F_k(K_n)) = k(n-k)$
- Prop. 5: $\lambda(F_k(P_n)) = 1$
- Prop. 6: $\lambda(F_k(C_n)) = 2$
- Prop. 7: $\lambda(F_k(K_{1,n-1})) = k$
- Prop. 8: $\lambda(F_k(K_{m,n})) \geq k(m-k+1)$, siempre que $n \geq m \geq k$
- Prop. 9: $\delta(F_m(K_{m,m})) = \left\lceil \frac{m^2}{2} \right\rceil$

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.
- Prop. 4: $\lambda(F_k(K_n)) = k(n-k)$
- Prop. 5: $\lambda(F_k(P_n)) = 1$
- Prop. 6: $\lambda(F_k(C_n)) = 2$
- Prop. 7: $\lambda(F_k(K_{1,n-1})) = k$
- Prop. 8: $\lambda(F_k(K_{m,n})) \geq k(m-k+1)$, siempre que $n \geq m \geq k$
- Prop. 9: $\delta(F_m(K_{m,m})) = \left\lceil \frac{m^2}{2} \right\rceil$
- Prop. 10, 11,12.

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.
- Prop. 4: $\lambda(F_k(K_n)) = k(n-k)$
- Prop. 5: $\lambda(F_k(P_n)) = 1$
- Prop. 6: $\lambda(F_k(C_n)) = 2$
- Prop. 7: $\lambda(F_k(K_{1,n-1})) = k$
- Prop. 8: $\lambda(F_k(K_{m,n})) \geq k(m-k+1)$, siempre que $n \geq m \geq k$
- Prop. 9: $\delta(F_m(K_{m,m})) = \left\lceil \frac{m^2}{2} \right\rceil$
- Prop. 10, 11,12.
- ¡Conjetura!

Durante esa semana...

- Programar...
- Prop. 1: $\lambda(F_k(G)) \geq \lambda(G)$
- Prop. 2: $\lambda(F_k(G)) = 1$ si y solo si $F_k(G)$ tiene una hoja si y solo si $\exists e \in E(G)$ tal que $G - e$ tiene una componente de orden k.
- Prop. 3: Sea $C \subset E(G)$. Si C es un t-corte mínimo de aristas de G que separa a un k-conjunto de vértices de G, entonces $\lambda(F_k(G)) = t$.
- Prop. 4: $\lambda(F_k(K_n)) = k(n-k)$
- Prop. 5: $\lambda(F_k(P_n)) = 1$
- Prop. 6: $\lambda(F_k(C_n)) = 2$
- Prop. 7: $\lambda(F_k(K_{1,n-1})) = k$
- Prop. 8: $\lambda(F_k(K_{m,n})) \geq k(m-k+1)$, siempre que $n \geq m \geq k$
- Prop. 9: $\delta(F_m(K_{m,m})) = \left\lceil \frac{m^2}{2} \right\rceil$
- Prop. 10, 11,12.
- ¡Conjetura! ... ¡Y presentación!

Conjetura

La conexidad por arista de una gráfica de fichas es igual a su grado mínimo:

$$\delta(F_k(G)) = \lambda(F_k(G))$$

Conjetura

La conexidad por arista de una gráfica de fichas es igual a su grado mínimo:

$$\delta(F_k(G)) = \lambda(F_k(G))$$

EVIDENCIA COMPUTACIONAL

¡México los espera!

Página web: tallerdiscretas.site

Referencias

- Estimación de algunos parámetros de las gráficas de fichas - Tesis de Maestría: Ana Laura Trujillo Negrete - 2016.
- The connectivity of token graphs - J. Leaños ? A. L. Trujillo-Negrete - 2015
- REGULARITY AND PLANARITY OF TOKEN GRAPHS - Walter Carballosa ? Ruy Fabila-Monroy ? Jesús Leaños ? Luis Manuel Rivera - 2010 - Discussiones Mathematicae Graph Theory.
- Token Graphs - Ruy Fabila-Monroy · David Flores-Peñaloza · Clemens Huemer · Ferran Hurtado · Jorge Urrutia · David R. Wood - 2011. Graphs and Combinatorics Journal.