

Politopos hipergrafos

Propiedades combinatorias y su antípoda



Viviana Márquez

Konrad Lorenz Fundación Universitaria
Clase: Combinatoria | Profesor: Julián Abril

Mayo 7, 2018

- Título del artículo:** Hypergraphic polytopes: combinatorial properties and antipode.
- Título en español:** Politopos hipergrafos: propiedades combinatorias y antípoda.
- Autores:** Carolina Benedetti, Nantel Bergeron, John Machacek.
- Publicación:** arXiv:1712.08848 [math.CO] 23 Dec 2017
- Science Direct:** [Enlace aquí.](#)

Definición: Grafo

Un **grafo** es una pareja ordenada $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de aristas, que son formadas por subconjuntos de V de tamaño 2.

Definición: Grafo

Un **grafo** es una pareja ordenada $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de aristas, que son formadas por subconjuntos de V de tamaño 2.

Ejemplo:

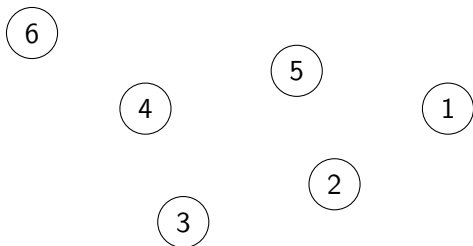
Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Definición: Grafo

Un **grafo** es una pareja ordenada $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de aristas, que son formadas por subconjuntos de V de tamaño 2.

Ejemplo:

Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



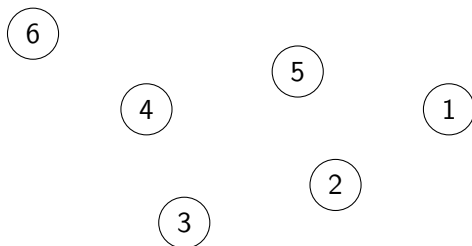
Definición: Grafo

Un **grafo** es una pareja ordenada $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de aristas, que son formadas por subconjuntos de V de tamaño 2.

Ejemplo:

Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$:



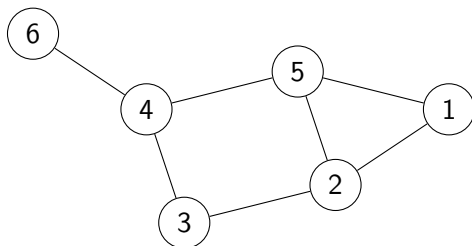
Definición: Grafo

Un **grafo** es una pareja ordenada $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de aristas, que son formadas por subconjuntos de V de tamaño 2.

Ejemplo:

Sea $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$:



Definición: Hipergrafo

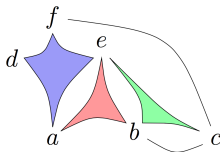
Un **hipergrafo** es una generalización de un grafo, el cual consiste de una pareja ordenada $HG = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de hiperaristas, que son formadas por cualquier número de vertices.

Definición: Hipergrafo

Un **hipergrafo** es una generalización de un grafo, el cual consiste de una pareja ordenada $HG = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de hiperaristas, que son formadas por cualquier número de vertices.

Ejemplo:

Sea $HG = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y
 $E = \{\{b, c\}, \{a, b, e\}, \{a, d, e, f\}, \{b, c, e\}, \{f, c\}\}$:

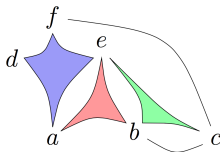


Definición: Hipergrafo

Un **hipergrafo** es una generalización de un grafo, el cual consiste de una pareja ordenada $HG = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de hiperaristas, que son formadas por cualquier número de vertices.

Ejemplo:

Sea $HG = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y
 $E = \{\{b, c\}, \{a, b, e\}, \{a, d, e, f\}, \{b, c, e\}, \{f, c\}\}$:



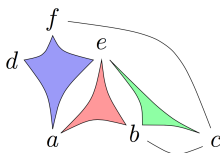
Nota:

Definición: Hipergrafo

Un **hipergrafo** es una generalización de un grafo, el cual consiste de una pareja ordenada $HG = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de hiperaristas, que son formadas por cualquier número de vertices.

Ejemplo:

Sea $HG = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y
 $E = \{\{b, c\}, \{a, b, e\}, \{a, d, e, f\}, \{b, c, e\}, \{f, c\}\}$:



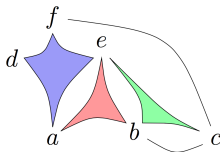
Nota: Es decir, E es un subconjunto de $\mathbb{P}(V)$,

Definición: Hipergrafo

Un **hipergrafo** es una generalización de un grafo, el cual consiste de una pareja ordenada $HG = (V, E)$ donde V es un conjunto de vértices y E es un conjunto de hiperaristas, que son formadas por cualquier número de vertices.

Ejemplo:

Sea $HG = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y
 $E = \{\{b, c\}, \{a, b, e\}, \{a, d, e, f\}, \{b, c, e\}, \{f, c\}\}$:



Nota: Es decir, E es un subconjunto de $\mathbb{P}(V)$, $\max |E| = \sum_{i=0}^{|V|} \binom{|V|}{i}$.

Definición: Orientación de hiperaristas

Una orientación de una arista es una partición de un conjunto ordenado. (El origen no puede ser todo, ni vacío). Una orientación de HG es una orientación de todas sus hiperaristas.

Definición: Orientación de hiperaristas

Una orientación de una arista es una partición de un conjunto ordenado. (El origen no puede ser todo, ni vacío). Una orientación de HG es una orientación de todas sus hiperaristas.

Ejemplo:

Tenemos la hiperarista $\{a, b, e\}$:



Definición: Orientación de hiperaristas

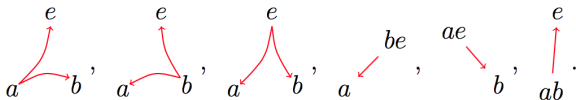
Una orientación de una arista es una partición de un conjunto ordenado. (El origen no puede ser todo, ni vacío). Una orientación de HG es una orientación de todas sus hiperaristas.

Ejemplo:

Tenemos la hiperarista $\{a, b, e\}$:



Todas sus posibles orientaciones:



Orientación de hiperaristas

Si una hiperarista es de tamaño n , entonces hay $2^n - 2$ posibles orientaciones.

Orientación de hiperaristas

Si una hiperarista es de tamaño n , entonces hay $2^n - 2$ posibles orientaciones.

Demostración:

- Dado que el origen no puede ser ni todo, ni vacío, se tiene que el origen se puede escoger de los subconjuntos de tamaño $\binom{n}{i}$ donde $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$.

Orientación de hiperaristas

Si una hiperarista es de tamaño n , entonces hay $2^n - 2$ posibles orientaciones.

Demostración:

- Dado que el origen no puede ser ni todo, ni vacío, se tiene que el origen se puede escoger de los subconjuntos de tamaño $\binom{n}{i}$ donde $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.
- Sabemos que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.

Orientación de hiperaristas

Si una hiperarista es de tamaño n , entonces hay $2^n - 2$ posibles orientaciones.

Demostración:

- Dado que el origen no puede ser ni todo, ni vacío, se tiene que el origen se puede escoger de los subconjuntos de tamaño $\binom{n}{i}$ donde $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.
- Sabemos que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.
- Restando $i = 0$ y $i = n$, se tiene que el total de posibles orientaciones es $2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{n}$.

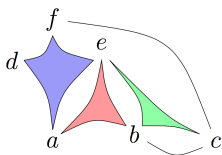
Orientación de hiperaristas

Si una hiperarista es de tamaño n , entonces hay $2^n - 2$ posibles orientaciones.

Demostración:

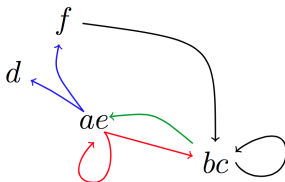
- Dado que el origen no puede ser ni todo, ni vacío, se tiene que el origen se puede escoger de los subconjuntos de tamaño $\binom{n}{i}$ donde $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.
- Sabemos que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.
- Restando $i = 0$ y $i = n$, se tiene que el total de posibles orientaciones es $2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{n}$.
- Es decir, $2^n - 2$.

Una posible orientación del hipergrafo:



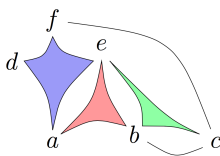
Es

$$\mathcal{O} = \{(\{b\}, \{c\}), (\{a\}, \{b, e\}), (\{a, e\}, \{d, f\}), (\{b, c\}, \{e\}), (\{f\}, \{c\})\}$$



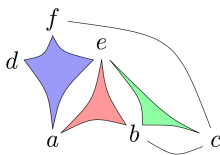
Ejercicio

¿Cuántas son las posibles orientaciones de ese hipergrafo?



Ejercicio

¿Cuántas son las posibles orientaciones de ese hipergrafo?



Respuesta: 2016.

- Recordemos que en los grafos, un grafo acíclico es un grafo donde no existe un camino a través del cual se puede comenzar y terminar en un mismo vértice.

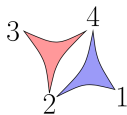
- Recordemos que en los grafos, un grafo acíclico es un grafo donde no existe un camino a través del cual se puede comenzar y terminar en un mismo vértice.

Definición: Orientación acíclica

Una orientación acíclica en un hipergrafo es un hipergrafo sin ciclos.

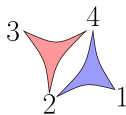
Ejemplo:

Considere el hipergrafo $HG = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$:



Ejemplo:

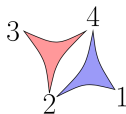
Considere el hipergrafo $HG = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$:



- ¿Cuántas posibles orientaciones tiene este hipergrafo?

Ejemplo:

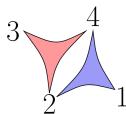
Considere el hipergrafo $HG = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$:



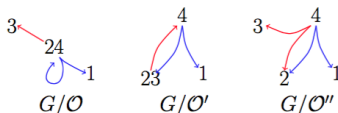
- ¿Cuántas posibles orientaciones tiene este hipergrafo? 36

Ejemplo:

Considere el hipergrafo $HG = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$:

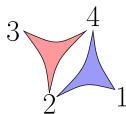


- ¿Cuántas posibles orientaciones tiene este hipergrafo? 36
- Posibles orientaciones:

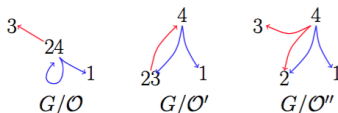


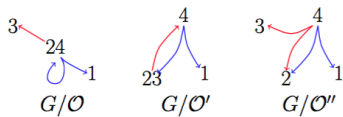
Ejemplo:

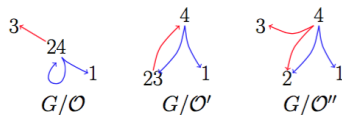
Considere el hipergrafo $HG = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$:



- ¿Cuántas posibles orientaciones tiene este hipergrafo? 36
- Posibles orientaciones:

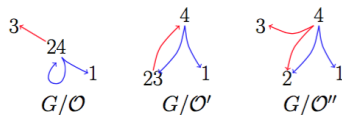






- De las 36 posibles orientaciones, sólo 20 son acíclicas.

$\{(\{4\}, \{1, 2\}), (\{4\}, \{2, 3\})\}$;	$\{(\{4\}, \{1, 2\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{4\}, \{1, 2\}), (\{3, 4\}, \{2\})\}$;
$\{(\{2\}, \{1, 4\}), (\{2\}, \{3, 4\})\}$;	$\{(\{2\}, \{1, 4\}), (\{2, 3\}, \{4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{4\}, \{2, 3\})\}$;
$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{2\}, \{3, 4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{2, 3\}, \{4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{2, 4\}, \{3\})\}$;
$\{(\{1, 2\}, \{4\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{1, 2\}, \{4\}), (\{2\}, \{3, 4\})\}$;	$\{(\{1, 2\}, \{4\}), (\{2, 3\}, \{4\})\}$;
$\{(\{1, 4\}, \{2\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{1, 4\}, \{2\}), (\{3, 4\}, \{2\})\}$;	$\{(\{2, 4\}, \{1\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;
$\{(\{2\}, \{1, 4\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{3, 4\}, \{2\})\}$;
$\{(\{1, 4\}, \{2\}), (\{4\}, \{2, 3\})\}$;	$\{(\{2, 4\}, \{1\}), (\{2, 4\}, \{3\})\}$;	



- De las 36 posibles orientaciones, sólo 20 son acíclicas.

$\{(\{4\}, \{1, 2\}), (\{4\}, \{2, 3\})\}$;	$\{(\{4\}, \{1, 2\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{4\}, \{1, 2\}), (\{3, 4\}, \{2\})\}$;
$\{(\{2\}, \{1, 4\}), (\{2\}, \{3, 4\})\}$;	$\{(\{2\}, \{1, 4\}), (\{2, 3\}, \{4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{4\}, \{2, 3\})\}$;
$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{2\}, \{3, 4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{2, 3\}, \{4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{2, 4\}, \{3\})\}$;
$\{(\{1, 2\}, \{4\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{1, 2\}, \{4\}), (\{2\}, \{3, 4\})\}$;	$\{(\{1, 2\}, \{4\}), (\{2, 3\}, \{4\})\}$;
$\{(\{1, 4\}, \{2\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{1, 4\}, \{2\}), (\{3, 4\}, \{2\})\}$;	$\{(\{2, 4\}, \{1\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;
$\{(\{2\}, \{1, 4\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{3\}, \{2, 4\})\}$;	$\{(\{1\}, \{2, 4\}), (\{3, 4\}, \{2\})\}$;
$\{(\{1, 4\}, \{2\}), (\{4\}, \{2, 3\})\}$;	$\{(\{2, 4\}, \{1\}), (\{2, 4\}, \{3\})\}$.	

Consideraciones:

- En general, saber cuántas orientaciones son acíclicas dado un hipergrafo es aún un **problema abierto**.

Consideraciones:

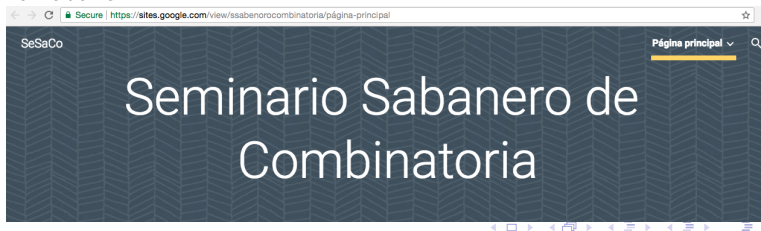
- En general, saber cuántas orientaciones son acíclicas dado un hipergrafo es aún un **problema abierto**.
- Las orientaciones acíclicas de los hipergrafos juegan un rol muy importante en la computación de su antipoda y en las álgebra de Hopf de los hipergrafos.

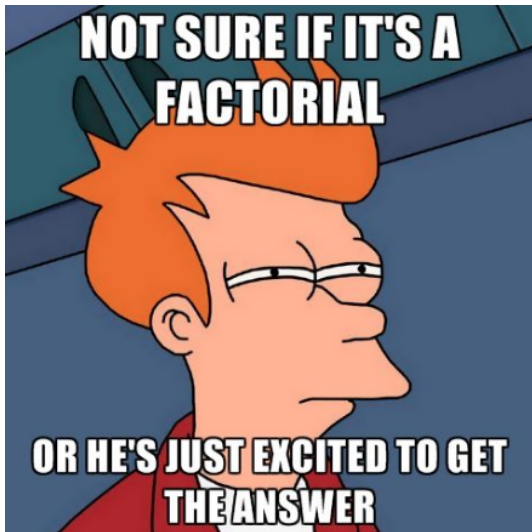
Consideraciones:

- En general, saber cuántas orientaciones son acíclicas dado un hipergrafo es aún un **problema abierto**.
- Las orientaciones acíclicas de los hipergrafos juegan un rol muy importante en la computación de su antipoda y en las álgebra de Hopf de los hipergrafos.
- Existen aplicaciones interesantes de este tema en la optimización combinatoria.

Consideraciones:

- En general, saber cuántas orientaciones son acíclicas dado un hipergrafo es aún un **problema abierto**.
- Las orientaciones acíclicas de los hipergrafos juegan un rol muy importante en la computación de su antipoda y en las álgebra de Hopf de los hipergrafos.
- Existen aplicaciones interesantes de este tema en la optimización combinatoria.
- Esta es una investigación reciente (2017) - Comunidad Colombiana de Combinatoria.





- Benedetti, C., Bergeron, N., Machacek, J. (2017). Hypergraphic polytopes: Combinatorial properties and antipode. ARXIV, Eprint arXiv:1712.08848. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1712.08848>.